

Miejsce  
na naklejkę  
z kodem szkoły

OKE ŁÓDŹ  
CKE

# MATEMATYKA

MARZEC  
ROK 2008

## POZIOM ROZSZERZONY

### PRZYKŁADOWY ZESTAW ZADAŃ NR 1

Czas pracy 150 minut

#### Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 19 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

*Życzymy powodzenia!*

Wypełnia zdający przed  
rozpoczęciem pracy

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

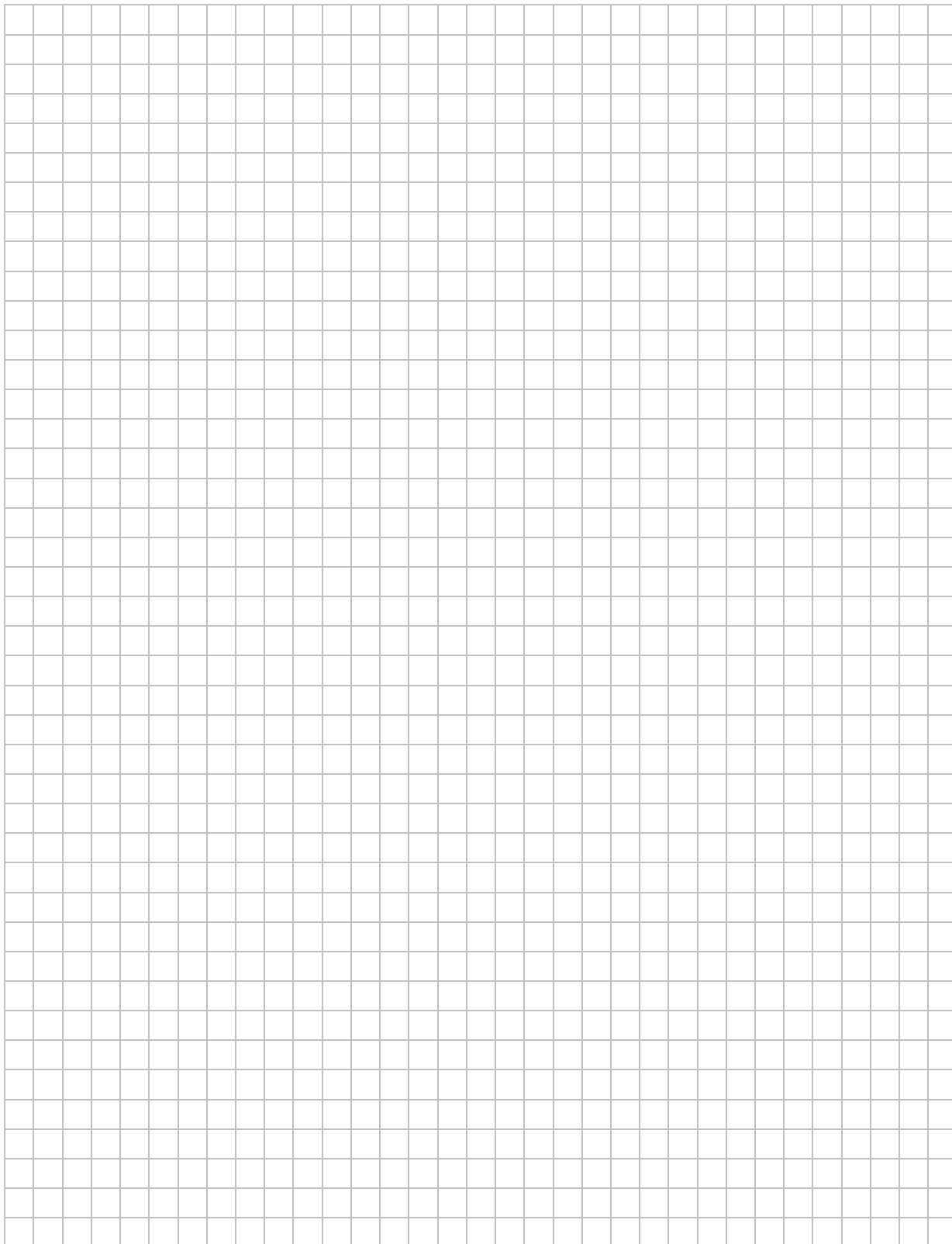
PESEL ZDAJĄCEGO

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

KOD  
ZDAJĄCEGO

**Zadanie 1. (5 pkt)**

Punkty  $A = (-2, 12)$  i  $B = (6, -2)$  są wierzchołkami trójkąta prostokątnego  $ABC$  o kącie prostym przy wierzchołku  $C$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$  tego trójkąta, wiedząc, że leży on na prostej o równaniu  $x + 3y = 22$ . Sporządź rysunek w prostokątnym układzie współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.



|                          |                     |      |      |      |      |      |
|--------------------------|---------------------|------|------|------|------|------|
| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 1.1. | 1.2. | 1.3. | 1.4. | 1.5. |
|                          | Maks. liczba pkt    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    |
|                          | Uzyskana liczba pkt |      |      |      |      |      |

**Zadanie 2. (4 pkt)**

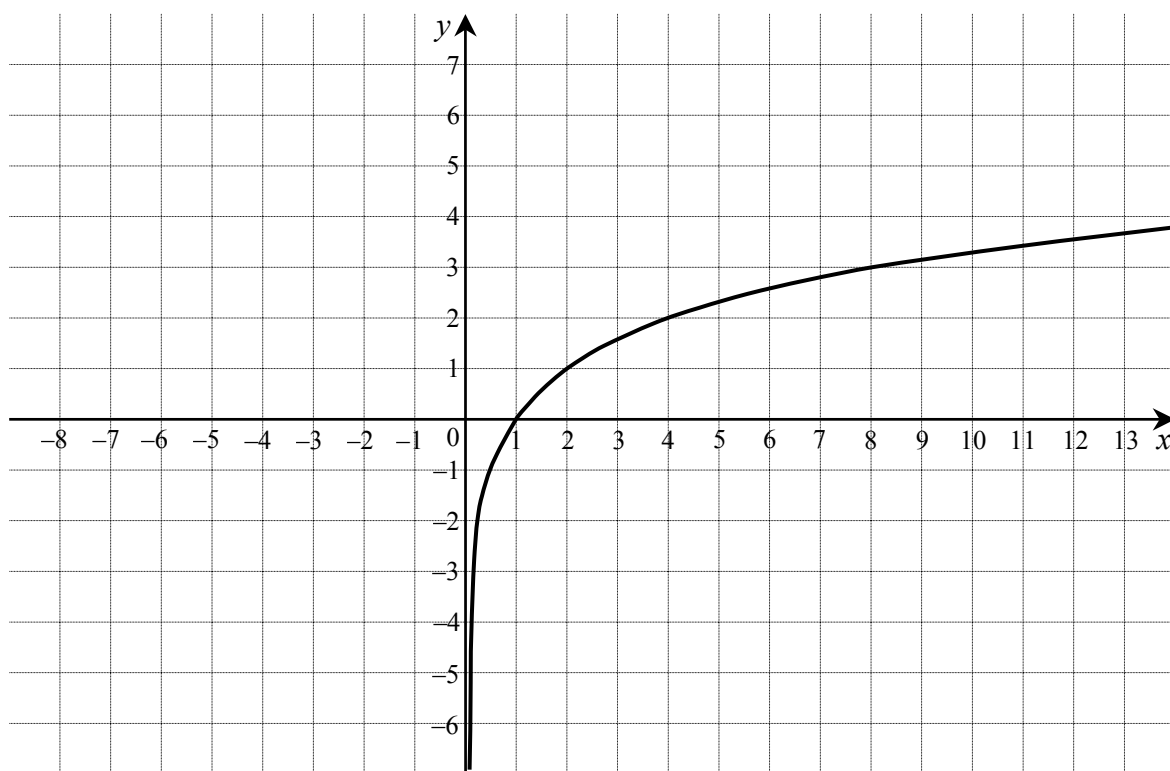
Wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$  dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , gdzie  $a \neq 0$ , przesunięto o wektor  $\vec{u} = [-3, 2]$  i otrzymano wykres funkcji  $g$ . Do wykresu funkcji  $g$  należy punkt  $A = (-4, 6)$ . Oblicz  $a$ , następnie rozwiąż nierówność  $g(x) < 4$ .

|                          |                     |      |      |      |      |
|--------------------------|---------------------|------|------|------|------|
| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 2.1. | 2.2. | 2.3. | 2.4. |
|                          | Maks. liczba pkt    | 1    | 1    | 1    | 1    |
|                          | Uzyskana liczba pkt |      |      |      |      |

**Zadanie 3. (5 pkt)**

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej opisanej wzorem  $f(x) = \log_p x$ .

- Na podstawie tego wykresu wyznacz  $p$ .
- Oblicz  $f(0,125)$ .
- Sporządź wykres funkcji  $g(x) = |f(x-4)|$ .
- Podaj miejsce zerowe funkcji  $g$ .

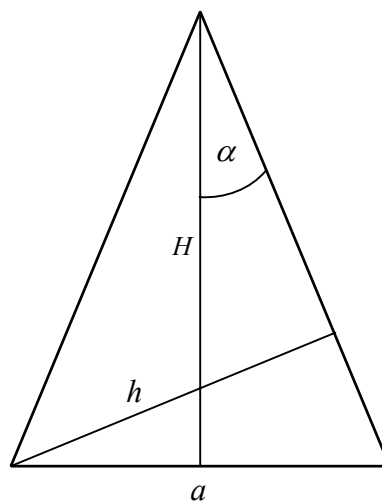


|                          |                     |      |      |      |      |      |
|--------------------------|---------------------|------|------|------|------|------|
| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 3.1. | 3.2. | 3.3. | 3.4. | 3.5. |
|                          | Maks. liczba pkt    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    |
|                          | Uzyskana liczba pkt |      |      |      |      |      |

**Zadanie 4. (6 pkt)**

W trójkącie równoramiennym (patrz rysunek) długość podstawy wynosi  $a$ , zaś wysokości opuszczone odpowiednio na podstawę i ramię są równe  $H$  i  $h$ . Kąt między ramieniem trójkąta i wysokością opuszczoną na podstawę ma miarę  $\alpha$ .

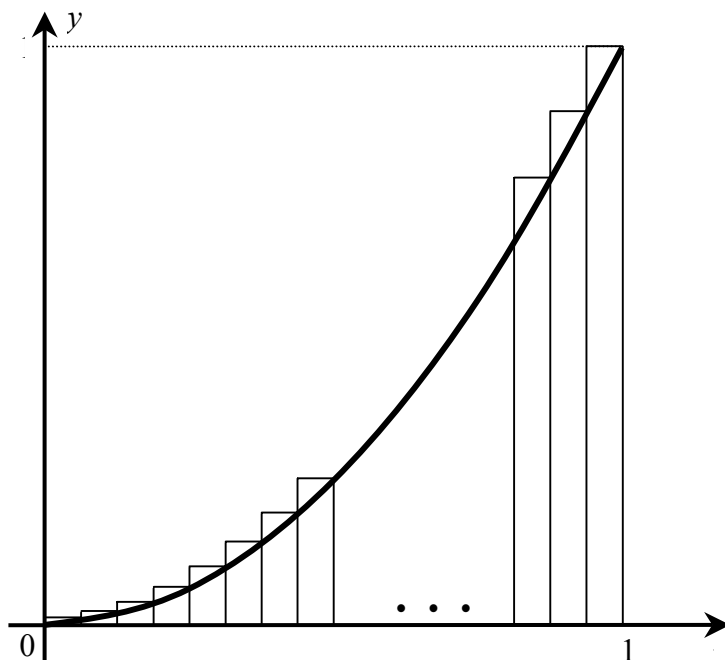
- Wyraż  $\operatorname{tg} \alpha$  w zależności od wielkości  $a$  i  $H$ .
- Wyraż  $\cos \alpha$  w zależności od wielkości  $a$  i  $h$ .
- Wykaż, że jeśli  $a^2 = H \cdot h$ , to  $\sin \alpha = \sqrt{2} - 1$ .



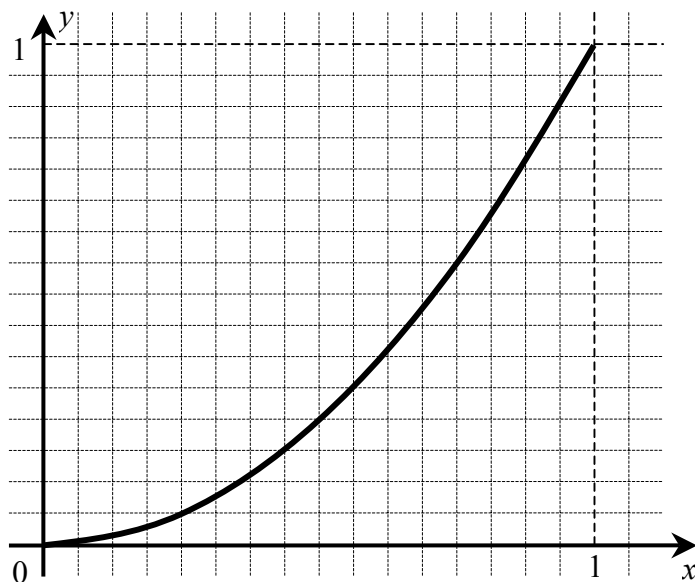
|                          |                     |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------|---------------------|------|------|------|------|------|------|
| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 4.1. | 4.2. | 4.3. | 4.4. | 4.5. | 4.6. |
|                          | Maks. liczba pkt    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    |
|                          | Uzyskana liczba pkt |      |      |      |      |      |      |

**Zadanie 5. (4 pkt)**

Pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji  $y = x^2$  dla  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  i osią  $Ox$  możemy obliczyć z dowolną dokładnością, zwiększając liczbę  $n$  prostokątów o szerokości  $\frac{1}{n}$  każdy (patrz rysunek) i sumując ich pola.

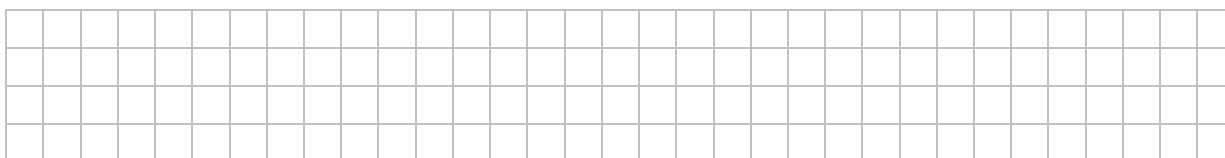


- a) Przedstaw ilustrację graficzną takiej sytuacji dla  $n = 4$  i oblicz sumę pól otrzymanych prostokątów.



- b) Oblicz sumę  $S_n$  pól  $n$  prostokątów, wykorzystując wzór:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



|                          |                     |      |      |      |      |
|--------------------------|---------------------|------|------|------|------|
| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 5.1. | 5.2. | 5.3. | 5.4. |
|                          | Maks. liczba pkt    | 1    | 1    | 1    | 1    |
|                          | Uzyskana liczba pkt |      |      |      |      |

**Zadanie 6. (3 pkt)**

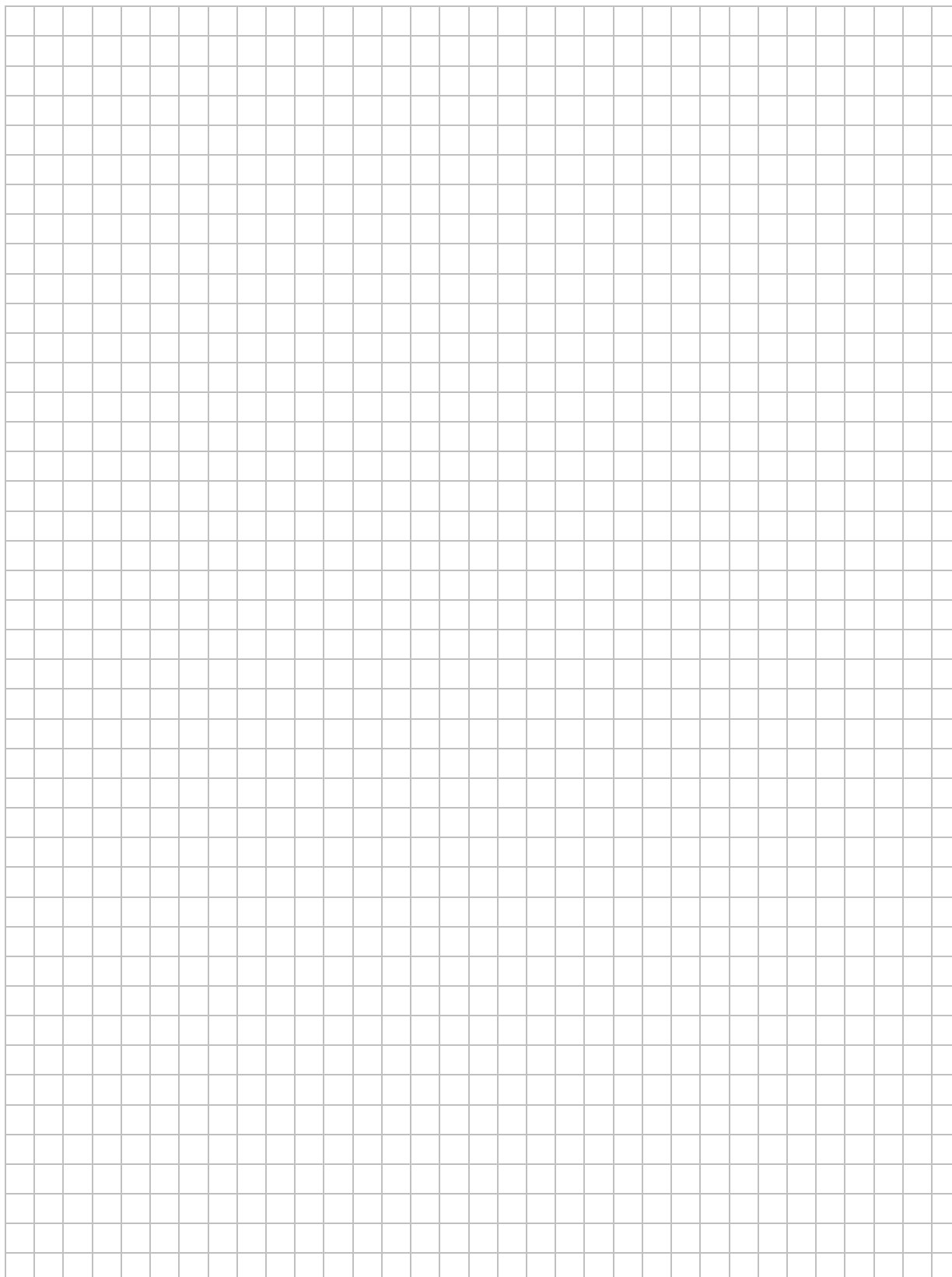
Wykaż, że wielomian  $W(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 9$  nie ma pierwiastków rzeczywistych.

| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 6.1. | 6.2. | 6.3. |
|--------------------------|---------------------|------|------|------|
|                          | Maks. liczba pkt    | 1    | 1    | 1    |
|                          | Uzyskana liczba pkt |      |      |      |

**Zadanie 7. (6 pkt)**

Dana jest funkcja  $f(x) = \sin^2 x + \cos x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .

- Rozwiąż równanie  $f(x) = 1$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .
- Wyznacz największą wartość funkcji  $f$ .



|                          |                     |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------|---------------------|------|------|------|------|------|------|
| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 7.1. | 7.2. | 7.3. | 7.4. | 7.5. | 7.6. |
|                          | Maks. liczba pkt    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    |
|                          | Uzyskana liczba pkt |      |      |      |      |      |      |

**Zadanie 8. (5 pkt)**

Podstawą ostrosłupa  $ABCD$  jest trójkąt równoboczny  $ABC$  o boku długości  $\sqrt{2}$ . Wszystkie ściany boczne są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi. Punkt  $P$  został wybrany wewnątrz ostrosłupa w ten sposób, że wysokości ostrosłupów  $ABDP$ ,  $BCDP$ ,  $ACDP$ ,  $ABCP$  opuszczone z wierzchołka  $P$  mają tę samą długość  $H$ . Sporządź rysunek ostrosłupa i oblicz  $H$ .

|                          |                     |      |      |      |      |      |
|--------------------------|---------------------|------|------|------|------|------|
| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 8.1. | 8.2. | 8.3. | 8.4. | 8.5. |
|                          | Maks. liczba pkt    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    |
|                          | Uzyskana liczba pkt |      |      |      |      |      |

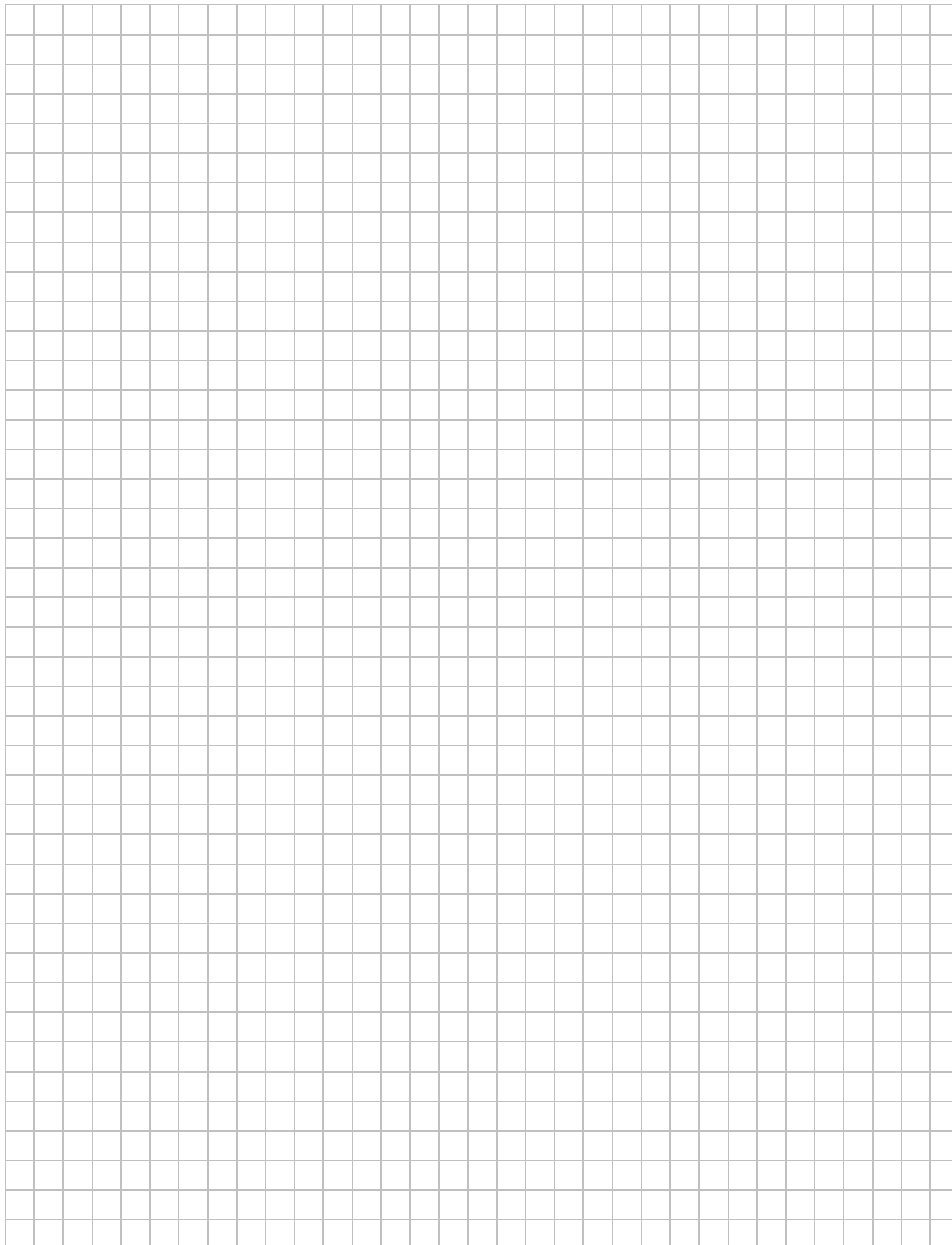
**Zadanie 9. (4 pkt)**

Grupa 4 kobiet i 4 mężczyzn, w tym jedno małżeństwo, wybrała się na pieszą wycieczkę. Na wąskiej ścieżce musieli iść gęsiego tzn. jedno za drugim. Zakładamy, że wszystkie możliwe ustawienia tych osób są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że jako pierwsze pójdą kobiety i żona będzie szła bezpośrednio przed mężem. Sprawdź, czy to prawdopodobieństwo jest mniejsze od 0,001.

| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 9.1. | 9.2. | 9.3. | 9.4. |
|--------------------------|---------------------|------|------|------|------|
|                          | Maks. liczba pkt    | 1    | 1    | 1    | 1    |
|                          | Uzyskana liczba pkt |      |      |      |      |

### Zadanie 10. (3 pkt)

Dany jest ciąg  $x_n = -1 - n$  dla  $n \geq 1$ . Ciąg  $(y_n)$  ma tę własność, że dla każdego  $n \geq 1$  punkty o współrzędnych  $(x_n, 0)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(0, y_n)$  leżą na jednej prostej. Wyznacz wzór ogólny ciągu  $(y_n)$ .



|                          |                     |       |       |       |
|--------------------------|---------------------|-------|-------|-------|
| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 10.1. | 10.2. | 10.3. |
|                          | Maks. liczba pkt    | 1     | 1     | 1     |
|                          | Uzyskana liczba pkt |       |       |       |

**Zadanie 11. (5 pkt)**

Długości boków trójkąta prostokątnego są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu.

|                          |                     |       |       |       |       |       |
|--------------------------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Wypełnia<br>egzaminator! | Nr czynności        | 11.1. | 11.2. | 11.3. | 11.4. | 11.5. |
|                          | Maks. liczba pkt    | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
|                          | Uzyskana liczba pkt |       |       |       |       |       |

## BRUDNOPIS

