



Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

EGZAMIN MATURALNY 2010

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Klucz punktowania odpowiedzi

MAJ 2010

Zadania zamknięte

W zadaniach od 1. do 25. podane były cztery odpowiedzi: A, B, C, D. Zdający wybierał poprawną odpowiedź i zaznaczał ją na karcie odpowiedzi.

Zadanie 1.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $ x - a \geq b$	C

Zadanie 2.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Modelowanie matematyczne	Wykonywanie obliczeń procentowych	B

Zadanie 3.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie w obliczeniach praw działań na potęgach	A

Zadanie 4.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie sumy logarytmów	B

Zadanie 5.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykonanie dodawania wielomianów	A

Zadanie 6.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie prostego równania wymiernego, prowadzącego do równania liniowego	D

Zadanie 7.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Sprawdzenie, czy dana liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej	D

Zadanie 8.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytanie współrzędnych wierzchołka paraboli z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej	B

Zadanie 9.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Interpretowanie współczynników we wzorze funkcji liniowej	B

Zadanie 10.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytywanie wartości funkcji z jej wykresu	C

Zadanie 11.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego	C

Zadanie 12.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu geometrycznego	B

Zadanie 13.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczania liczby przekątnych wielokąta	B

Zadanie 14.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Stosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	A

Zadanie 15.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie długości boku kwadratu wpisanego w okrąg	A

Zadanie 16.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do wyznaczenia wysokości tego trójkąta równoramiennego	B

Zadanie 17.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Posługiwanie się własnościami figur podobnych do obliczania długości odcinków	A

Zadanie 18.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Korzystanie ze związków między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta	A

Zadanie 19.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie pola figury płaskiej z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych	C

Zadanie 20.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie współczynnika kierunkowego prostej równoległej do danej prostej	B

Zadanie 21.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie równania okręgu o podanej długości promienia	D

Zadanie 22.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie odległości punktów na płaszczyźnie	C

Zadanie 23.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Obliczanie pola powierzchni wielościanu	A

Zadanie 24.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Obliczanie liczby krawędzi wielościanu	D

Zadanie 25.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Obliczanie średniej arytmetycznej	D

Zadania otwarte

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 26. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie nierówności kwadratowej

Rozwiązanie

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

albo

- stosujemy wzory Viète’a:
 $x_1 + x_2 = 1$ oraz $x_1 \cdot x_2 = -2$
i stąd $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

albo

- zapisujemy nierówność w postaci $(x+1)(x-2) \leq 0$. Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:
o grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,

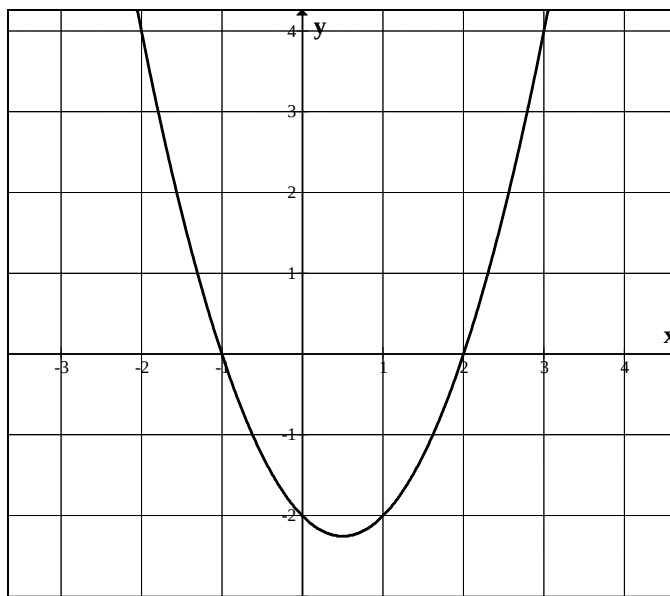
- o korzystając z postaci kanonicznej

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x+1)(x-2),$$

- o podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi



albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

Podajemy rozwiązanie nierówności: $-1 \leq x \leq 2$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $-1 \leq x \leq 2$ lub $\langle -1, 2 \rangle$ lub $x \in \langle -1, 2 \rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \geq -1$, $x \leq 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



Zadanie 27. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie równania wielomianowego

I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów

$$x(x^2 - 4) - 7(x^2 - 4) = 0 \quad \text{lub} \quad x^2(x - 7) - 4(x - 7) = 0$$

$$(x - 7)(x^2 - 4) = 0$$

Stąd $x = 7$ lub $x = -2$ lub $x = 2$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.:

$x(x^2 - 4) - 7(x^2 - 4) = 0$ lub $x^2(x - 7) - 4(x - 7) = 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x = 7$ lub $x = -2$ lub $x = 2$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$. Dzielimy wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $(x - 2)$. Otrzymujemy iloraz $(x^2 - 5x - 14)$.

Zapisujemy równanie w postaci $(x - 2)(x^2 - 5x - 14) = 0$. Stąd $(x - 2)(x + 2)(x - 7) = 0$ i $x = 7$ lub $x = -2$ lub $x = 2$.

albo

Stwierdzamy, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$. Dzielimy wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $(x + 2)$. Otrzymujemy iloraz $(x^2 - 9x + 14)$.

Zapisujemy równanie w postaci $(x + 2)(x^2 - 9x + 14) = 0$. Stąd $(x + 2)(x - 2)(x - 7) = 0$ i $x = -2$ lub $x = 2$ lub $x = 7$.

albo

Stwierdzamy, że liczba 7 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$. Dzielimy wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $(x - 7)$. Otrzymujemy iloraz $(x^2 - 4)$.

Zapisujemy równanie w postaci $(x - 7)(x^2 - 4) = 0$. Stąd $(x - 7)(x - 2)(x + 2) = 0$ i $x = 7$ lub $x = -2$ lub $x = 2$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $(x - 2)$, otrzyma iloraz $(x^2 - 5x - 14)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $(x + 2)$, otrzyma iloraz $(x^2 - 9x + 14)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $(x - 7)$, otrzyma iloraz $(x^2 - 4)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez trójmian np. $(x - 2)(x - 7)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy

- wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x = 2, x = -2, x = 7$

Zadanie 28. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Rozumowania i argumentacji	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego składającego się z niewielkiej liczby kroków

Rozwiązanie

Dorysowujemy odcinki AD i BE . Pokazujemy, że trójkąty ACD i BCE są przystające:

- $|AC| = |BC|$, bo trójkąt ABC jest równoramienny
- $|CD| = |CE|$, bo trójkąt CDE jest równoramienny
- $|\sphericalangle ACD| = 90^\circ - |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle BCE|$
- Stosujemy cechę przystawania bkb

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- napisze, że trójkąty ACD i BCE są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|AD| = |BE|$

albo

- zapisze, że $|AC| = |BC|$, $|CD| = |CE|$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy poprawnie uzasadni, że trójkąty ACD i BCE są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|AD| = |BE|$. Wymagamy udowodnienia równości kątów ACD i BCE .

Zadanie 29. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

I sposób rozwiązania (jedynka trygonometryczna)

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{12} \cos \alpha \\ \left(\frac{5}{12} \cos \alpha \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\frac{25}{144} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{144}{169} \quad \text{i} \quad \cos \alpha > 0$$

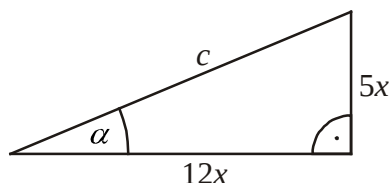
$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{12}{5} \sin \alpha \\ \left(\frac{12}{5} \sin \alpha \right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\frac{144}{25} \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{25}{169} \quad \text{i} \quad \sin \alpha > 0$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \quad \text{ad} \quad \cos \alpha = \frac{12}{13} \quad \text{i} \quad \alpha = \arcsin \frac{5}{13}$$

II sposób rozwiązania (trójkąt prostokątny)

$$c^2 = (12x)^2 + (5x)^2$$

$$c = 13x$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- przekształcił dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\cos \alpha$ i wykorzysta „jedynkę trygonometryczną”, np. $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cos \alpha$, $\frac{25}{144} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształcił dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\sin \alpha$ i wykorzysta „jedynkę trygonometryczną”, np. $\cos \alpha = \frac{12}{5} \sin \alpha$, $\frac{144}{25} \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształcił dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\sin \alpha$ np. $\frac{25}{144} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$ lub $25 - 25 \sin^2 \alpha = 144 \sin^2 \alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$, np.
 $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ lub $\cos^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym oraz zapisze $\sin \alpha$ i na tym zakończy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym i zapisze $\cos \alpha$

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności), obliczy długość przeciwprostokątnej i zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta α : $\alpha \approx 22^\circ$ (akceptujemy wynik $\alpha \approx 23^\circ$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy

- obliczy wartość $\cos \alpha$: $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

albo

- obliczy przybliżoną wartość $\cos \alpha$: $\cos 22^\circ \approx 0,9272$ lub $\cos 23^\circ \approx 0,9205$

Zadanie 30. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Rozumowania i argumentacji	Wykazanie prawdziwości nierówności

I sposób rozwiązania

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{a^2 + 1}{a + 1} \geq \frac{a + 1}{2}$$

$$2(a^2 + 1) \geq (a + 1)^2$$

$$2a^2 + 2 \geq a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$(a - 1)^2 \geq 0$$

co kończy dowód.

$$\frac{a^2 + 1}{a + 1} - \frac{a + 1}{2} \geq 0$$

$$\frac{2(a^2 + 1) - (a + 1)^2}{2(a + 1)} \geq 0$$

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{2(a + 1)} \geq 0$$

$$\frac{(a - 1)^2}{2(a + 1)} \geq 0$$

co kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest nierówność $(a-1)^2 \geq 0$.

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$(a-1)^2 + (a+1)^2 \geq (a+1)^2$$

$$2a^2 + 2 \geq (a+1)^2$$

$$2(a^2 + 1) \geq (a+1)^2$$

Ponieważ $a > 0$, więc $\frac{a^2 + 1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$

co kończy dowód.

III sposób rozwiązania (dowód nie wprost)

Przypuśćmy, że dla pewnego $a > 0$ mamy $\frac{a^2 + 1}{a+1} < \frac{a+1}{2}$. Przekształcamy tę nierówność

tak, jak w I sposobie rozwiązania do postaci, np. $(a-1)^2 < 0$ i stwierdzamy, że otrzymaliśmy sprzeczność.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy

- otrzyma nierówność $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ lub $\frac{a^2 - 2a + 1}{2(a+1)} \geq 0$ i na tym poprzestanie lub w dalszej części dowodu popełni błąd

albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność $(a-1)^2 < 0$ i nie zapisze żadnych wniosków lub zapisze błędne wnioski

albo

- stosując II sposób rozwiązania otrzyma nierówność $2a^2 + 2 \geq (a+1)^2$ i nie zapisze żadnych wniosków lub zapisze błędne wnioski.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy

- zapisze nierówność $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie a spełniają tę nierówność

albo

- zapisze nierówność $\frac{a^2 - 2a + 1}{2(a+1)} \geq 0$ i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie a spełniają tę nierówność

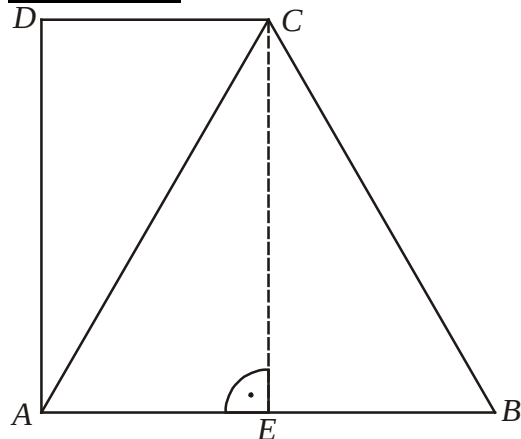
albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność $(a-1)^2 < 0$ i zapisze, że otrzymana nierówność nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej a .

Zadanie 31. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie związków miarowych w trójkącie prostokątnym i równobocznym

Rozwiązanie



Prowadzimy wysokość CE trójkąta równobocznego ABC .

Wówczas $|AE| = 3$ i stąd $|CD| = |AE| = 3$.

Następnie zapisujemy, że $|BC| = |AB| = 6$

oraz $|DA| = |CE| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Stąd obwód trapezu jest równy

$$6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 15 + 3\sqrt{3}.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- prawidłowo podzielił trapez na trójkąty i poprawnie obliczył długość krótszej podstawy trapezu ($|DC| = 3$) i na tym zakończył lub popełnił błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

albo

- prawidłowo podzielił trapez na trójkąty i poprawnie obliczył wysokość trapezu ($h = 3\sqrt{3}$) i na tym zakończył lub popełnił błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy obliczył poprawnie obwód trapezu: $15 + 3\sqrt{3}$.

Zadanie 32. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Obliczanie objętości wielościanu

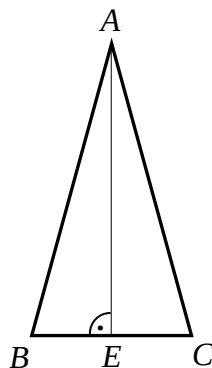
Uwaga

Strategia rozwiązania tego zadania sprowadza się do realizacji następujących etapów rozwiązania:

- obliczenie długości krawędzi AB lub AC podstawy ostrosłupa bądź wysokości DE ściany bocznej BCD
- zastosowanie poprawnej metody obliczenia pola podstawy i obliczenie tego pola
- obliczenie objętości ostrosłupa

I sposób rozwiązania (krawędź podstawy, wysokość AE podstawy i „zwykły” wzór na pole trójkąta ABC)

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABD wynika, że $|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$, stąd $|AB| = 5$. Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ACD wynika, że $|AC| = 5$.



Rysujemy trójkąt ABC i prowadzimy w nim wysokość AE . Trójkąt ABC jest równoramienny ($|AB| = |AC|$), więc $|BE| = |EC| = 3$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABE mamy $|AE|^2 = |AB|^2 - |BE|^2 = 16$, stąd $|AE| = 4$.

Zatem $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Obliczenie długości krawędzi AB lub AC podstawy ostrosłupa: $|AB| = 5$, $|AC| = 5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie wysokości AE trójkąta ABC : $|AE| = 4$.

Uwaga

Zdający nie musi uzasadniać, że $|BE| = |EC|$, wystarczy, że poprawnie stosuje twierdzenie Pitagorasa do obliczenia wysokości AE trójkąta ABC .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$.

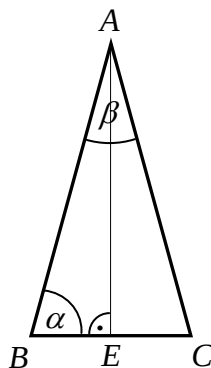
Uwaga

Jeśli zdający przy obliczaniu wysokości trójkąta ABC lub pola tego trójkąta (pola podstawy ostrosłupa) nie stosuje poprawnej metody (co przekreśla poprawność strategii rozwiązania zadania), np. przyjmie, że środkowa CF trójkąta ABC jest jego wysokością, to za całe rozwiązanie przyznajemy co najwyżej **1 punkt** (zdający nie osiągnął istotnego postępu).

II sposób rozwiązania (krawędź podstawy, cosinus jednego z kątów trójkąta ABC , wzór z sinusem na pole trójkąta ABC)

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABD wynika, że

$|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$, stąd $|AB| = 5$. Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ACD wynika, że $|AC| = 5$.



Rysujemy trójkąt ABC i prowadzimy w nim wysokość AE i oznaczamy $\alpha = |\angle ABC|$.

Wariant I obliczenia pola podstawy.

Trójkąt ABC jest równoramienny ($|AB| = |AC|$), więc $|BE| = |EC| = 3$.

Stąd $\cos \alpha = \frac{|BE|}{|BA|} = \frac{3}{5}$. Zatem $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

Pole trójkąta ABC jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |BA| \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 12$.

Wariant II obliczenia pola podstawy.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC obliczamy $\cos \beta$:

$6^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos \beta$, stąd $\cos \beta = \frac{7}{25}$.

Następnie obliczamy $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$.

Pole trójkąta ABC jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{24}{25} = 12$.

Po obliczeniu pola podstawy obliczamy objętość V ostrosłupa

$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Obliczenie długości krawędzi AB lub AC podstawy ostrosłupa: $|AB| = 5$, $|AC| = 5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie sinusa jednego z kątów trójkąta ABC : $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ lub $\sin \beta = \frac{24}{25}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pktObliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$.**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$.**Uwaga**

Jeśli zdający przy obliczaniu wysokości trójkąta ABC lub pola tego trójkąta (pola podstawy ostrosłupa) nie stosuje poprawnej metody (co przekreśla poprawność strategii rozwiązania zadania), np. zapisze, że $\sin \alpha = \frac{|BE|}{|BA|} = \frac{3}{5}$, to za całe rozwiązanie przyznajemy co najwyżej **1 punkt** (zdający nie osiągnął istotnego postępu).

III sposób rozwiązania (krawędź podstawy, wzór Herona na pole trójkąta ABC)

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABD wynika, że $|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$, stąd $|AB| = 5$. Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ACD wynika, że $|AC| = 5$. Pole trójkąta ABC obliczamy ze wzoru Herona

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ gdzie } p = \frac{5+5+6}{2} = 8, \quad p-a = 8-6 = 2,$$

$$p-b = p-c = 8-5 = 3.$$

$$P_{ABC} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 12.$$

$$\text{Objętość ostrosłupa jest równa } V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot |AD| = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48.$$

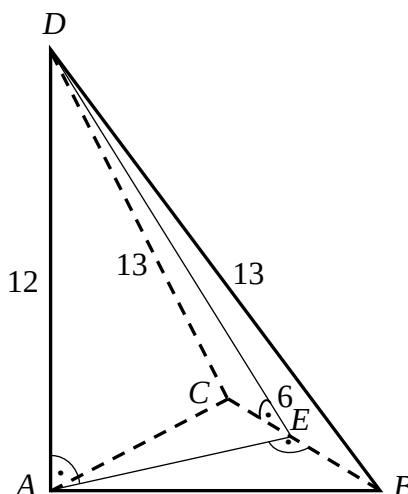
Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.....1 pkt**Obliczenie długości krawędzi AB lub AC podstawy ostrosłupa: $|AB| = 5$, $|AC| = 5$.**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$.**Uwaga**

Zdający otrzymuje **2 punkty**, jeśli poprawnie zastosuje wzór Herona, popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pola trójkąta ABC i na tym zakończy.

Rozwiązanie pełne.....4 pktObliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$.

IV sposób rozwiązania (wysokość ściany bocznej BCD , wysokość AE podstawy i „zwykły” wzór na pole trójkąta ABC)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt BCD jest równoramienny, więc środek E boku BC jest spodkiem wysokości DE tego trójkąta. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta BED wynika, że $|DE|^2 = |BD|^2 - |BE|^2 = 13^2 - 3^2 = 160$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ADE obliczamy wysokość AE trójkąta ABC

$|AE|^2 = |DE|^2 - |AD|^2 = 160 - 12^2 = 16$, stąd $|AE| = 4$.

Pole trójkąta ABC jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Obliczenie wysokości DE ściany bocznej BCD ostrosłupa (lub kwadratu tej wysokości):

$$|DE| = 4\sqrt{10}.$$

Uwaga

Zdający nie musi uzasadniać, że $|BE| = |EC|$, wystarczy, że poprawnie stosuje twierdzenia Pitagorasa do obliczenia wysokości DE trójkąta BCD .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie wysokości AE trójkąta ABC : $|AE| = 4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$.

Zadanie 33. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Modelowanie matematyczne	Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Rozwiązanie (model klasyczny)

Ω jest zbiorem wszystkich par (a, b) takich, że $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mamy model klasyczny.

$$|\Omega| = 36.$$

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$$(2, 6), (4, 3), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)$$

$$\text{Zatem } |A| = 6 \text{ i stąd } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ oraz, że $A = \{(2, 6), (4, 3), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ oraz obliczy $|A| = 6$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Uwaga

Jeżeli zdający wypisze bezbłędnie wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , ale błędnie zapisze ich liczbę (np. $|A| = 5$ albo $|A| = 7$) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje 3 punkty.

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

$$\text{Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia } A: P(A) = \frac{1}{6}$$

Uwaga

Jeśli zdający ograniczy swoje rozwiązanie do zapisu $|\Omega| = 36$; $|A| = 6$ oraz $P(A) = \frac{1}{6}$, to otrzymuje 1 pkt.

Zadanie 34. (0–5)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x długość (w metrach) basenu w pierwszym hotelu i przez y szerokość (w metrach) tego basenu. Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ (x+5) \cdot (y+2) = 350 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny: $x \cdot y + 2x + 5y + 10 = 350$, podstawiamy do tego równania $x \cdot y = 240$ i wyznaczamy z tak przekształconego równania

niewiadomą x : $x = \frac{100-5y}{2}$. Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego

równania $\frac{100-5y}{2} \cdot y = 240$, które następnie przekształcamy do postaci:

$$y^2 - 20y + 96 = 0. \text{ Rozwiązaniami tego równania są: } y_1 = 8, y_2 = 12.$$

Zatem:

- jeżeli $y = 8$, to $x = 30$ i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: $30 \text{ m} \times 8 \text{ m}$, zaś basen w drugim hotelu: $35 \text{ m} \times 10 \text{ m}$,
- jeżeli $y = 12$, to $x = 20$ i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: $20 \text{ m} \times 12 \text{ m}$, zaś basen w drugim hotelu: $25 \text{ m} \times 14 \text{ m}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń, na przykład: x, y – wymiary basenu w pierwszym hotelu i zapisanie równania $x \cdot y = 240$ albo równania $(x+5) \cdot (y+2) = 350$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y , np.

$$\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ (x+5) \cdot (y+2) = 350 \end{cases}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może od razu zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y , np:

$$(x+5) \cdot \left(\frac{240}{x} + 2 \right) = 350 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{240}{y} + 5 \right) \cdot (y+2) = 350$$

Rozwiązanie prawie całkowite 4 pkt

Doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego oraz rozwiązanie równania kwadratowego:

$$x^2 - 50x + 600 = 0, \text{ skąd } x = 20 \text{ lub } x = 30$$

albo

$$y^2 - 20y + 96 = 0, \text{ skąd } y = 8 \text{ lub } y = 12$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Zdający popełnia błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania (ale otrzymuje dwa rozwiązania) i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza wymiary obu basenów.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zapisanie wymiarów obu basenów:

Basen w pierwszym hotelu ma wymiary $30 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ i w drugim hotelu $35 \text{ m} \times 10 \text{ m}$

lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary $20 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ i w drugim $25 \text{ m} \times 14 \text{ m}$.