

Zadanie 1. (4 pkt)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna $2(1 - \cos^2 x) - 7\cos x - 5 = 0$

$$2 - 2\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$$

$$2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, np. $t = \cos x$, gdzie $t \in \langle -1, 1 \rangle$

Otrzymujemy równanie kwadratowe

$$2t^2 + 7t + 3 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$t_1 = \frac{-7-5}{4} = -3 \quad t_2 = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}$$

Odrzucamy rozwiązanie $t_1 = -3$, ponieważ $-3 \notin \langle -1, 1 \rangle$

Rozwiązujemy równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$

Zapisujemy rozwiązania równania w podanym przedziale

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{4}{3}\pi$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.:
 $-2\cos^2 x - 7\cos x - 3 = 0$ lub $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t = \cos x$, zapisanie równania w postaci
 $-2t^2 - 7t - 3 = 0$ lub $2t^2 + 7t + 3 = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Rozwiązanie równania kwadratowego ($t = -\frac{1}{2}$ lub $t = -3$) i odrzucenie rozwiązania $t = -3$.

Uwaga:

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest $\cos x$) i zapisać rozwiązanie w postaci $\cos x = -\frac{1}{2}$ lub $\cos x = -3$ oraz zapisać, że równanie $\cos x = -3$ jest sprzeczne.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Rozwiązanie równania w podanym przedziale:

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{4}{3}\pi$$

albo

$$x = 120^\circ \text{ lub } x = 240^\circ$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający podstawia $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ bez żadnych założeń, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający podniesie obie strony równania $2\cos^2 x + 3 = -7\cos x$ do kwadratu i potem nie sprawdzi rozwiązań, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Nie wymagamy, aby zdający zapisał warunek np. $t \in \langle -1, 1 \rangle$, o ile z dalszego ciągu rozwiązania wynika, że zdający uwzględni go.
4. Jeżeli zdający rozwiąże poprawnie równanie kwadratowe i na tym zakończy, nie odrzucając rozwiązania $t = -3$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania kwadratowego i otrzyma dwa rozwiązania, z których co najmniej jedno należy do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$ i konsekwentnie rozwiąże oba równania w podanym przedziale, to otrzymuje **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego:
 $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 2. (4 pkt)

Rozwiąż nierówność $|2x + 2| + |x - 2| > 5$.

I sposób rozwiązania: wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, \infty \rangle$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności

$x \in (-\infty, -1)$	$x \in \langle -1, 2 \rangle$	$x \in \langle 2, \infty \rangle$
$-2x - 2 - x + 2 > 5$	$2x + 2 - x + 2 > 5$	$2x + 2 + x - 2 > 5$
$-3x > 5$	$x > 1$	$3x > 5$
$x < -\frac{5}{3}$		$x > \frac{5}{3}$

Wyznaczamy część wspólną otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami

$$x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$$

$$x \in (1, 2)$$

$$x \in \langle 2, \infty \rangle$$

i bierzemy sumę tych przedziałów: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

II sposób rozwiązania: zapisanie czterech przypadków

Zapisujemy cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przypadkach:

$\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ 2x+2+x-2 > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ 3x > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases}$ $x \in \langle 2, \infty \rangle$	$\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \\ 2x+2-x+2 > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$ $x \in (1, 2)$	$\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ niemożliwe	$\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \\ -2x-2-x+2 > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \\ -3x > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \\ x < -\frac{5}{3} \end{cases}$ $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$
--	--	--	--

Podajemy odpowiedź: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

- zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, \infty \rangle$

albo

- zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$.

Uwaga:

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy **0 punktów**.

Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach np:

I. $x \in (-\infty, -1) \quad -2x-2-x+2 > 5$

II. $x \in \langle -1, 2 \rangle \quad 2x+2-x+2 > 5$

III. $x \in \langle 2, \infty \rangle \quad 2x+2+x-2 > 5$

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca
albo
- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Uwaga:

1. We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte) to przyznajemy za całe zadanie o **1 pkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.
2. Jeżeli zdający przy przekształcaniu nierówności podanej w treści zadania popełni błąd (np. $|2(x+2)| + |x-2| > 5$), to otrzymuje **1 punkt mniej** niż przewidziany w schemacie w danej kategorii rozwiązania.

III sposób rozwiązania: graficznie 1

$$|2x+2| + |x-2| > 5.$$

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = |2x+2| + |x-2|$ i prostą o równaniu $y = 5$

Wyróżniamy przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, \infty \rangle$.

Zapisujemy wzór funkcji w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in (-\infty, -1)$ $f(x) = -2x - 2 - x + 2$

II. $x \in \langle -1, 2 \rangle$ $f(x) = 2x + 2 - x + 2$

III. $x \in \langle 2, \infty \rangle$ $f(x) = 2x + 2 + x - 2$

Przekształcamy wzór funkcji w poszczególnych przedziałach do postaci, np.

I. $x \in (-\infty, -1)$ $f(x) = -3x$

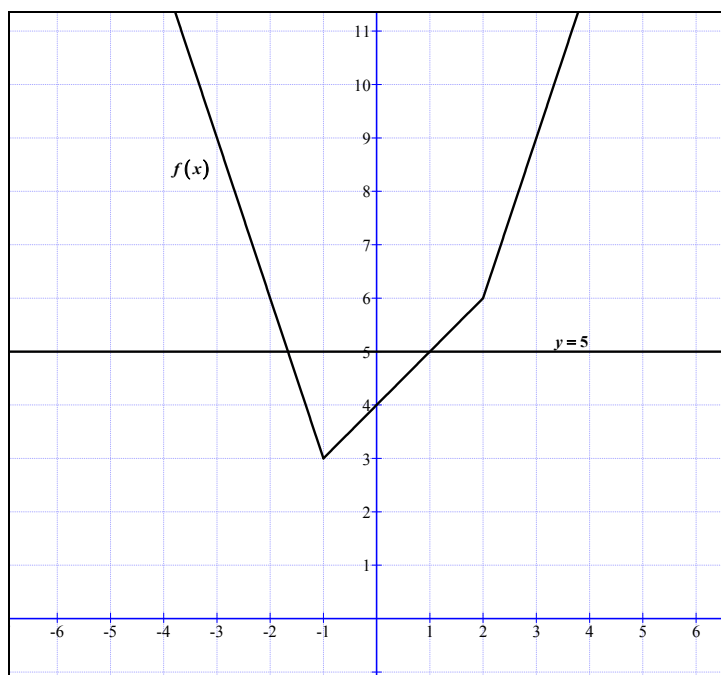
II. $x \in \langle -1, 2 \rangle$ $f(x) = x + 4$

III. $x \in \langle 2, \infty \rangle$ $f(x) = 3x$

Zapisujemy wzór funkcji, np.

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x+4 & \text{dla } x \in \langle -1, 2) \\ 3x & \text{dla } x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = 5$.



Odczytujemy odcięte punktów przecięcia wykresu funkcji z prostą o równaniu $y = 5$:

$$x = -\frac{5}{3}, x = 1.$$

Zapisujemy argumenty, dla których $f(x) > 5$: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2)$, $\langle 2, \infty)$.

Uwaga:

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to przyznajemy **0 punktów** za całe zadanie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający zapisze wzór funkcji w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in (-\infty, -1)$ $f(x) = -3x$

II. $x \in \langle -1, 2 \rangle$ $f(x) = x + 4$

III. $x \in \langle 2, \infty \rangle$ $f(x) = 3x$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x + 4 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ 3x & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = 5$.

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Zdający poda odpowiedź: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Uwaga:

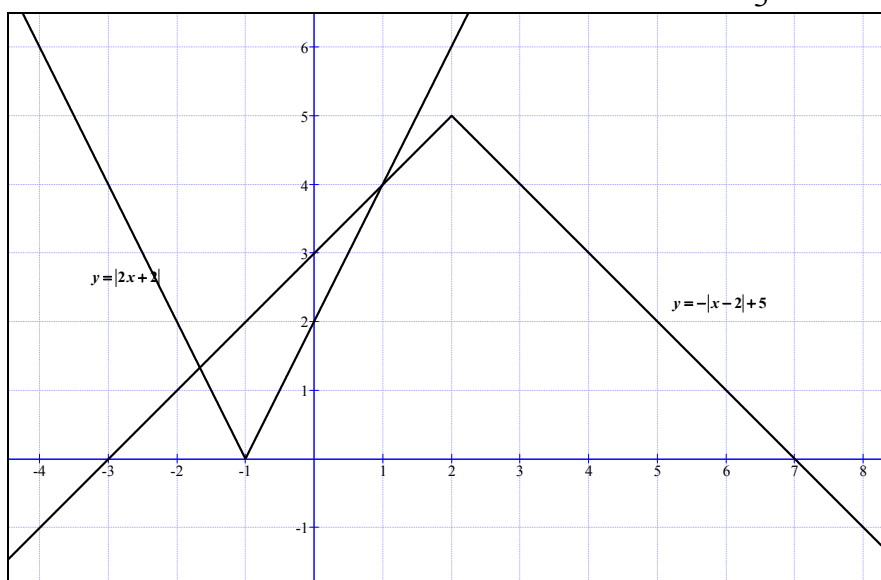
We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać przedziały obustronnie domknięte. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie przedziały otwarte, to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

IV sposób rozwiązania: graficznie 2

Zapisujemy nierówność $|2x + 2| + |x - 2| > 5$ w postaci, np. $|2x + 2| > -|x - 2| + 5$.

Rysujemy wykresy funkcji: $y = |2x + 2|$, $y = -|x - 2| + 5$.

Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresów funkcji: $x = -\frac{5}{3}$, $x = 1$.



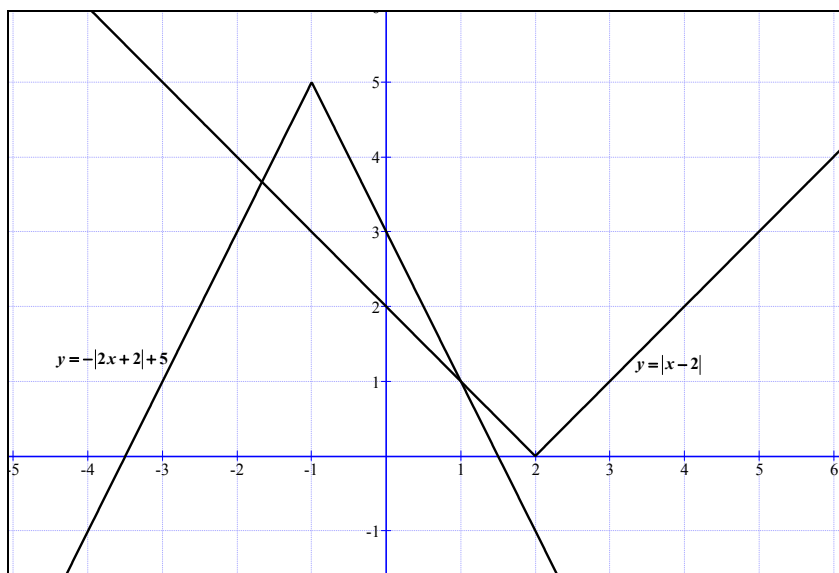
Zapisujemy odpowiedź: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

V sposób rozwiązania: graficznie 3

Zapisujemy nierówność $|2x+2|+|x-2|>5$ w postaci, np. $|x-2|>-|2x+2|+5$.

Rysujemy wykresy funkcji: $y=|x-2|$, $y=-|2x+2|+5$.

Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresów funkcji: $x=-\frac{5}{3}$, $x=1$.



Zapisujemy odpowiedź: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zdający zapisze nierówność w postaci $|2x+2|>-|x-2|+5$ lub $|x-2|>-|2x+2|+5$ i narysuje wykresy funkcji, np. $y=2x+2$ lub $y=x-2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający narysuje wykresy funkcji: $y=|2x+2|$ i $y=-|x-2|+5$

lub $y=|x-2|$ i $y=-|2x+2|+5$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3 pkt

Zdający narysuje poprawnie wykresy funkcji i błędnie wyznaczy odcięte jednego z punktów przecięcia się wykresów funkcji (np. $x=-2$ lub $x=1$) i konsekwentnie poda odpowiedź.

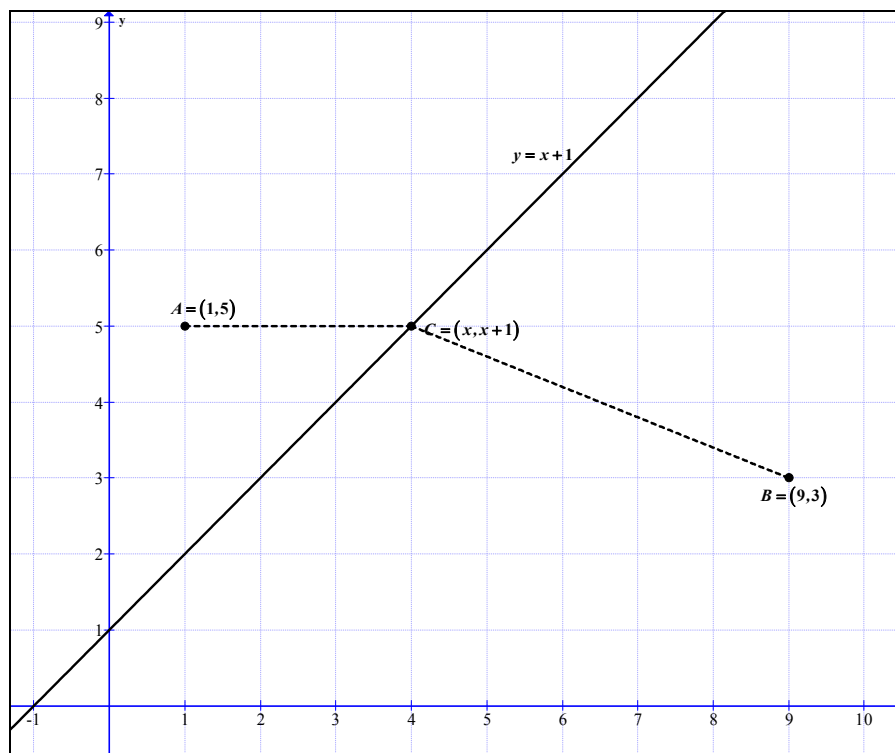
Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zapisanie odpowiedzi: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Zadanie 3. (5 pkt)

Dane są punkty $A = (1, 5)$, $B = (9, 3)$ i prosta k o równaniu $y = x + 1$. Oblicz współrzędne punktu C leżącego na prostej k , dla którego suma $|AC|^2 + |BC|^2$ jest najmniejsza.

Rozwiązanie



Punkt C leży na prostej k , więc ma współrzędne: $C = (x, x + 1)$.

Wyznaczamy kwadraty odległości punktu C od punktów A i B :

$$|AC|^2 = (x - 1)^2 + (x - 4)^2, \quad |BC|^2 = (x - 9)^2 + (x - 2)^2$$

Określamy wzór funkcji jednej zmiennej będącej sumą kwadratów odległości punktu C od punktów A i B :

$$f(x) = (x - 1)^2 + (x - 4)^2 + (x - 9)^2 + (x - 2)^2,$$

po uporządkowaniu otrzymujemy: $f(x) = 4x^2 - 32x + 102$.

Wyznaczamy argument, dla którego wartość tej funkcji jest najmniejsza: $x = 4$.

Obliczamy rzędną punktu C : $y = 5$.

Odpowiedź: Współrzędne punktu $C = (4, 5)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zapisanie współrzędnych punktu C leżącego na prostej k : $C = (x, x + 1)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie zależności z jedną niewiadomą określającej kwadraty odległości punktu A od C lub odległości punktu B od C (lub odległości):

$$|AC|^2 = (x-1)^2 + (x-4)^2 \text{ lub } |BC|^2 = (x-9)^2 + (x-2)^2$$
$$(\text{albo } |AC| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-4)^2} \text{ lub } |BC| = \sqrt{(x-9)^2 + (x-2)^2}).$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Określenie wzoru funkcji jednej zmiennej będącej sumą kwadratów odległości punktu C od punktów A i B :

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-4)^2 + (x-9)^2 + (x-2)^2 \text{ lub } f(x) = 4x^2 - 32x + 102.$$

Uwagi:

Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu jednej z odległości $|AC|$ lub $|BC|$ i na tym poprzestanie, to otrzymuje 2 punkty.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C = (4,5)$.

Uwaga:

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu jednej z odległości $|AC|$ lub $|BC|$ i rozwiązanie doprowadzi do końca, to otrzymuje 4 punkty.
2. Jeżeli zdający obliczy odciętą wierzchołka paraboli o równaniu $y = 4x^2 - 32x + 102$ tj. pierwszą współrzędną punktu C i na tym zakończy lub błędnie obliczy jego drugą współrzędną, to otrzymuje 4 punkty.

Zadanie 4. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - (m-4)x + m^2 - 4m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od $2m^3 - 3$.

Rozwiązanie

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2m^3 - 3 \end{cases}$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = -3m^2 + 8m + 16$ i rozwiązujemy nierówność

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{4}{3}, 4\right)$$

Zapisujemy warunek $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$ w postaci nierówności z jedną niewiadomą:

$$m - 4 < 2m^3 - 3$$

$$2m^3 - m + 1 > 0$$

Doprowadzamy nierówność do postaci

$$(m+1)(2m^2 - 2m + 1) > 0$$

Otrzymujemy $m \in (-1, \infty)$.

Zatem $m \in (-1, 4)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

- a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\frac{4}{3}, 4\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

- b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$, $m \in (-1, \infty)$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

- c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b). Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

- zapisanie nierówności $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$ w postaci równoważnej $m - 4 < 2m^3 - 3$ albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

$$\left(\frac{m-4-\sqrt{-3m^2+8m+16}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-4+\sqrt{-3m^2+8m+16}}{2}\right)^2 < 2m^3 - 3.$$

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania 2 pkt

Doprowadzenie nierówności do postaci $(m+1)(2m^2-2m+1) > 0$ lub wyznaczenie pierwiastków wielomianu zapisanego po lewej stronie nierówności.

Rozwiązanie bezbłędne części b) 3 pkt

Rozwiązanie nierówności: $m \in (-1, \infty)$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i zapisanie odpowiedzi $m \in (-1, 4)$.

Uwaga. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań obu nierówności, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 5. (4 pkt)

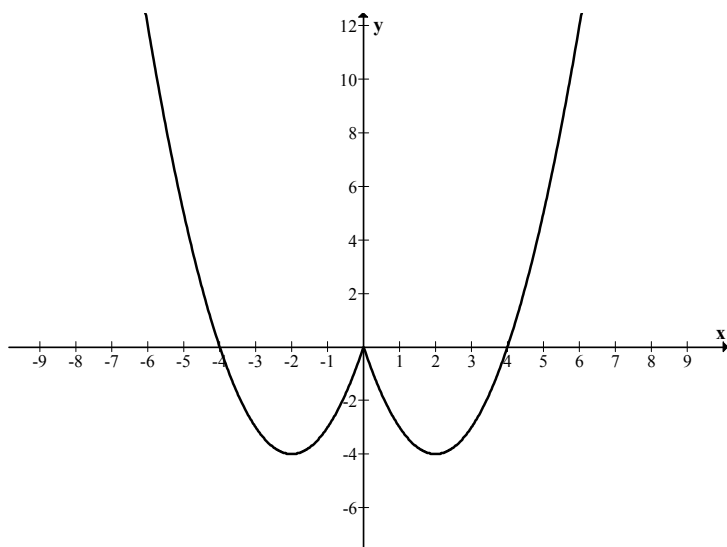
Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4|x|$ i na jego podstawie wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

Rozwiązanie

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{dla } x \in (0, \infty) \\ x^2 + 4x & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Szkicujemy wykres otrzymanej funkcji f :



Z wykresu funkcji f odczytujemy liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$:

$$\begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty, -4) \\ 2 & \text{dla } m \in \{-4\} \cup (0, \infty) \\ 3 & \text{dla } m = 0 \\ 4 & \text{dla } m \in (-4, 0) \end{cases}$$

Schemat oceniania

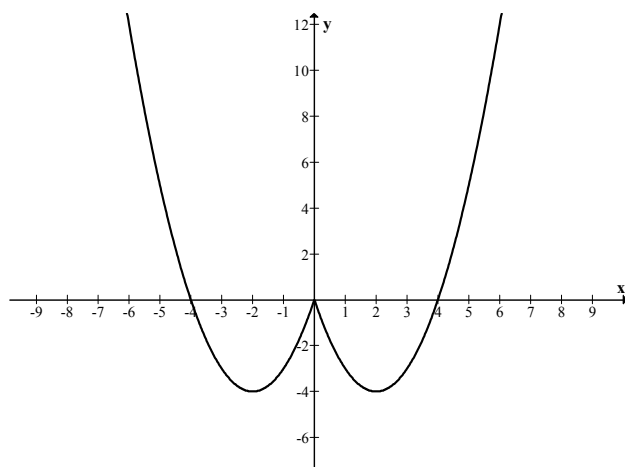
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

- zapisanie funkcji f na przykład w postaci: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{dla } x < 0 \\ x^2 - 4x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

albo

- stwierdzenie, że wykres funkcji f jest symetryczny względem osi Oy lub stwierdzenie równoważne.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt
Narysowanie wykresu funkcji f .



Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania..... 3 pkt

- zdający popełni jeden błąd w ustalaniu liczby rozwiązań równania $f(x) = m$ albo
- zdający błędnie wyznaczy miejsca zerowe lub współrzędne wierzchołka paraboli, ale wykres funkcji ma trzy punkty wspólne z osią Ox i jest symetryczny względem osi Oy i konsekwentnie do popełnionego błędu poda liczbę rozwiązań równania.

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Podanie liczby rozwiązań na przykład w postaci:

$$\begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty, -4) \\ 2 & \text{dla } m \in \{-4\} \cup (0, \infty) \\ 3 & \text{dla } m = 0 \\ 4 & \text{dla } m \in (-4, 0) \end{cases}$$

Zadanie 6. (4 pkt)

Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b .

Rozwiązanie

Obie strony nierówności $\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ podnosimy do czwartej potęgi, uzyskując równoważną nierówność postaci: $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{4}$, czyli $\frac{(a^2 - b^2)^2}{4} \geq 0$. Stąd wnioskujemy, że dana w zadaniu nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych a i b .

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Doprowadzenie nierówności do postaci $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{4}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Doprowadzenie nierówności $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{4}$ do postaci, z której łatwo wywnioskować, że jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b , np.
 $\frac{(a^2 - b^2)^2}{4} \geq 0$.

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Uwaga:

Mogą być rozwiązania, w których zdający od razu napisze, że średnia potęgowa stopnia 4 jest nie mniejsza od średniej kwadratowej (średniej potęgowej stopnia 2), bo im wyższy stopień, tym większa średnia. Należy wtedy przyznać 4 pkt.

Zadanie 7. (5 pkt)

Objętość graniastoslupa prawidłowego trójkątnego jest równa $12\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej tego graniastoslupa jest równe 36. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Objętość graniastoslupa jest równa

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H,$$

a pole powierzchni bocznej

$$P_b = 3a \cdot H$$

Stąd i z treści zadania otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} H = 12\sqrt{3} \\ 3aH = 36 \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest

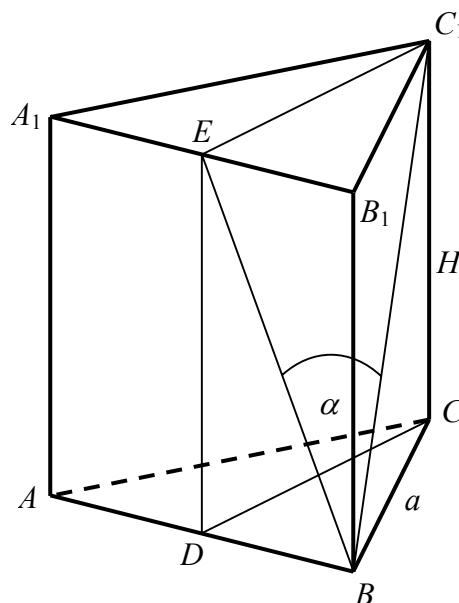
$$\begin{cases} a = 4 \\ H = 3 \end{cases}$$

Obliczamy sinus kąta α nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej :

$\sin \alpha = \frac{|EC_1|}{|BC_1|}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCC_1 mamy

$|BC_1| = \sqrt{a^2 + H^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, a ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego

$$|EC_1| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \text{ więc } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$



Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

Zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie długości krawędzi graniastosłupa (a - krawędź podstawy, H - krawędź boczna):

$$\begin{cases} \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = 12\sqrt{3} \\ 3aH = 36 \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} a = 4 \\ H = 3 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 pkt

Zapisanie $\sin \alpha = \frac{|EC_1|}{|BC_1|}$ (lub zapisanie $\sin \alpha$ w innej równoważnej postaci np. $\sin \alpha = \frac{h}{d}$,

h – wysokość trójkąta, d – przekątna ściany bocznej).

Rozwiązanie bezbłędne 5 pkt

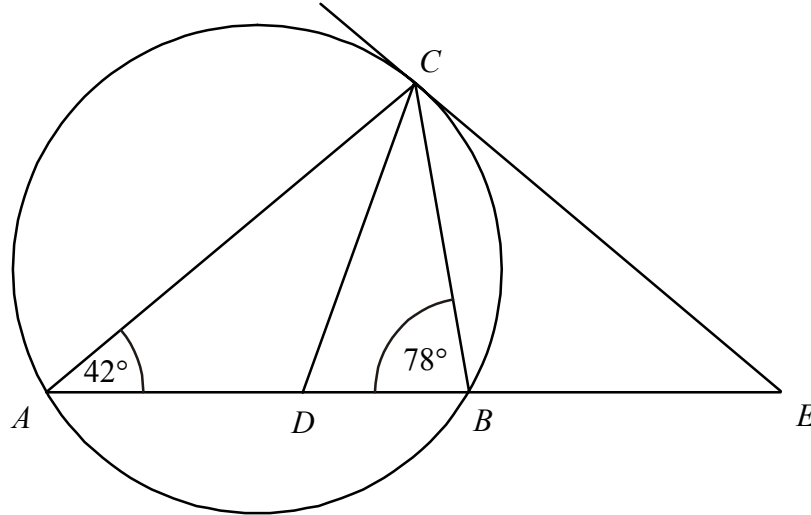
Obliczenie $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Uwagi:

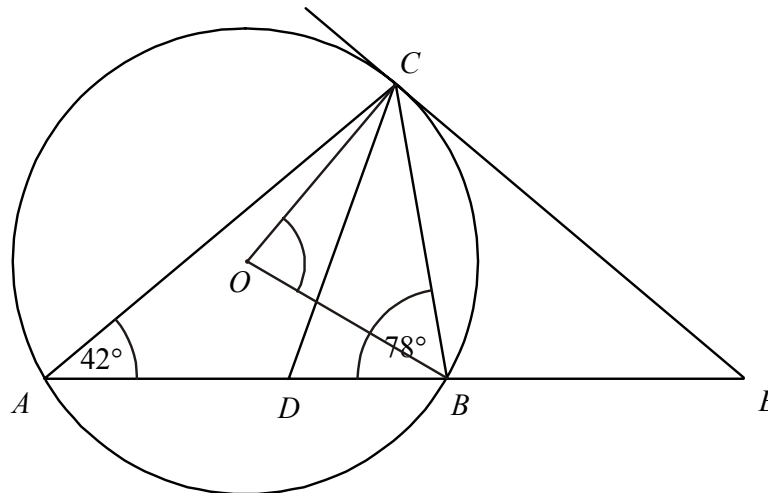
1. Jeżeli zdający narysuje graniastosłup i zaznaczy na nim kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej i na tym poprzestanie, to przyznajemy **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający nie zapisze układu równań lub zapisze go błędnie, ale określi $\sin \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + H^2}}$ (lub zapisze $\sin \alpha$ w innej równoważnej postaci np. $\sin \alpha = \frac{h}{d}$, h – wysokość trójkąta, d – przekątna ściany bocznej) i na tym poprzestanie, to przyznajemy **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający rozwiąże układ równań bezbłędnie i narysuje graniastosłup z zaznaczonym na nim kątem nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej i na tym poprzestanie, to przyznajemy **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu układu równań i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to przyznajemy **4 punkty**.

Zadanie 8. (4 pkt)

Odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB trójkąta ABC . Kąty trójkąta ABC mają miary: $|\sphericalangle CAB| = 42^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 78^\circ$. Styczna do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie C przecina prostą AB w punkcie E (zobacz rysunek). Oblicz, ile stopni ma każdy z kątów trójkąta CDE .



Rozwiązanie



$$|\sphericalangle DCB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} (180^\circ - 42^\circ - 78^\circ) = 30^\circ$$

$$|\sphericalangle CDE| = 180^\circ - (78^\circ + 30^\circ) = 72^\circ$$

Kąt COB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt CAB , więc $|\sphericalangle COB| = 84^\circ$.

Trójkąt COB jest równoramienny stąd $|\sphericalangle OCB| = 48^\circ$.

$$|\sphericalangle BCE| = 90^\circ - |\sphericalangle OCB| = 42^\circ.$$

Do obliczenia miary tego kąta możemy też wykorzystać twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą.

$$|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle BCE| = 30^\circ + 42^\circ = 72^\circ.$$

$$|\sphericalangle CED| = 180^\circ - (|\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle DCE|) = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ.$$

Odpowiedź: Miary kątów trójkąta CDE to $|\sphericalangle CDE| = 72^\circ$, $|\sphericalangle DCE| = 72^\circ$, $|\sphericalangle CED| = 36^\circ$.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

Obliczenie miary kąta CDE : $|\sphericalangle CDE| = 72^\circ$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie miar kątów COB i OCB , gdzie O jest środkiem okręgu

$|\sphericalangle COB| = 84^\circ$, $|\sphericalangle OCB| = 48^\circ$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie miary kąta BCE : $|\sphericalangle BCE| = 42^\circ$.

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Obliczenie miar kątów trójkąta CDE : $|\sphericalangle CDE| = 72^\circ$, $|\sphericalangle DCE| = 72^\circ$, $|\sphericalangle CED| = 36^\circ$.

Zadanie 9. (4 pkt)

Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym ustawieniu suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

I sposób rozwiązania

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny, $|\Omega| = 8!$.

Zauważmy, że zdarzenie A - suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, zachodzi, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste.

Stąd $|A| = 2 \cdot 4! \cdot 4!$ albo $|A| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ i $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{35}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

- zdający obliczy $|\Omega| = 8!$

albo

- zdający zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający obliczy $|\Omega| = 8!$ i zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający obliczy $|\Omega| = 8!$ i $|A| = 4! \cdot 4! \cdot 2$ albo $|A| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie bezbłędne 4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo i poda wynik w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego: $P(A) = \frac{1}{35}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze $|A| = 4! \cdot 4!$ i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{1}{70}$, to przyznajemy **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy albo nie poda wyniku w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, to przyznajemy 3 punkty.

II sposób rozwiązania

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie podzbiory czteroelementowe zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (numery miejsc, na których stoją liczby parzyste (nieparzyste)). Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny, $|\Omega| = \binom{8}{4}$.

Zauważmy, że zdarzenie A - suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, zachodzi, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste.

Stąd $|A| = 2$ i $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{35}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

- zdający zauważy, że aby rozwiązać zadanie, wystarczy znać numery miejsc, na których stoją liczby parzyste (nieparzyste) i obliczy $|\Omega| = \binom{8}{4}$

albo

- zdający zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający obliczy $|\Omega| = \binom{8}{4}$ i zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający obliczy $|\Omega| = \binom{8}{4}$ i $|A| = 2$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie pełne **4 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo i poda wynik w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego: $P(A) = \frac{1}{35}$.

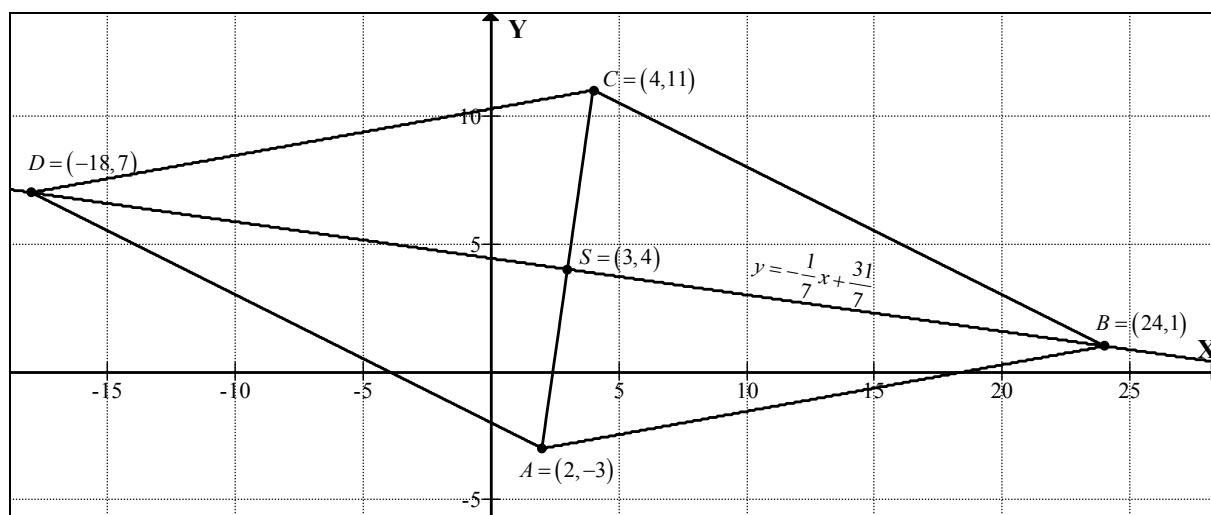
Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze $|A|=1$ i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{1}{70}$, to przyznajemy **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy lub nie poda wyniku w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, to przyznajemy **3 punkty**.

Zadanie 10. (6 pkt)

Punkt $A = (2, -3)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym 300. Punkt $S = (3, 4)$ jest środkiem symetrii tego rombu. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

I sposób rozwiązania (środek symetrii rombu)



Przekątne rombu są względem siebie prostopadłe i dzielą się na połowy. Znając współrzędne punktu A oraz środka symetrii rombu S obliczamy współrzędne punktu C .

$$x_S = \frac{x_A + x_C}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_C = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \quad y_C = 2 \cdot 4 - (-3) = 11$$

Punkt C ma współrzędne $(4, 11)$.

Obliczamy długość przekątnej AC : $|AC| = 10\sqrt{2}$.

Z wzoru na pole rombu obliczamy długość przekątnej BD .

$$300 = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot |BD| \quad |BD| = 30\sqrt{2}.$$

Niech $B = (x, y)$, $|BS| = \frac{|BD|}{2} = 15\sqrt{2}$ oraz $|BS| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$. Punkt B leży na prostej o równaniu $x + 7y = 31$. Wyznaczam współrzędne punktów B i D :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = (15\sqrt{2})^2 \\ x+7y=31 \end{cases} & \text{lub} & \begin{cases} (4-x)^2 + (11-y)^2 = (15\sqrt{2})^2 \\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{31}{7} \end{cases} \\ &\begin{cases} (31-7y-3)^2 + (y-4)^2 = 450 \\ x=31-7y \end{cases} & & (4-x)^2 + \left(11 + \frac{1}{7}x - \frac{31}{7}\right)^2 = 500 \\ &(28-7y)^2 + (y-4)^2 = 450 & & 16-8x+x^2 + \frac{1}{49}(x^2+92x+2116) = 500 \\ &7^2(4-y)^2 + (y-4)^2 = 450 & & x^2-6x-432=0 \\ &49(y-4)^2 + (y-4)^2 = 450 & & x=-18 \text{ lub } x=24 \\ &50(y-4)^2 = 450 & & \begin{cases} y=7 \\ x=-18 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=1 \\ x=24 \end{cases} \\ &(y-4)^2 = 9 & & \\ &y-4=3 \quad \text{lub} \quad y-4=-3 & & \\ &\begin{cases} y=7 \\ x=-18 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y=1 \\ x=24 \end{cases} & & \end{aligned}$$

Współrzędne pozostałych wierzchołków rombu: $B = (24,1)$, $D = (-18,7)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie współrzędnych wierzchołka C oraz długości przekątnej AC (lub jej połowy):

$$C = (4,11), |AC| = 10\sqrt{2} \quad (|AS| = 5\sqrt{2}).$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktów B i D :

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = (15\sqrt{2})^2 \\ x+7y=31 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 pkt

Przekształcenie układu do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.

$$(28-7y)^2 + (y-4)^2 = 450$$

Rozwiązanie pełne 6 pkt

Współrzędne pozostałych wierzchołków rombu: $B = (24,1)$, $C = (4,11)$, $D = (-18,7)$.

Odpowiedź: Współrzędne pozostałych wierzchołków rombu: $B = (24,1)$, $C = (4,11)$, $D = (-18,7)$.

II sposób rozwiązania (iloczyn skalarny)

Przekątne rombu są względem siebie prostopadłe i dzielą się na połowy. Znając współrzędne punktu A oraz środka symetrii rombu S obliczamy współrzędne punktu C .

$$x_S = \frac{x_A + x_C}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_C = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \quad y_C = 2 \cdot 4 - (-3) = 11$$

Punkt C ma współrzędne $(4, 11)$.

Obliczamy długość przekątnej AC : $|AC| = 10\sqrt{2}$.

Z wzoru na pole rombu obliczamy długość przekątnej BD .

$$300 = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot |BD| \quad |BD| = 30\sqrt{2}$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość boku AD :

$$|AD|^2 = |AS|^2 + |SD|^2 \quad |AS| = \frac{1}{2}|AC|, \quad |SD| = \frac{1}{2}|BD|$$

$$|AD| = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (15\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{5}$$

Wyznaczamy współrzędne punktów B i D rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} |AD|^2 = 500 \\ \overrightarrow{AS} \circ \overrightarrow{DS} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 500 \\ [1, 7] \circ [3-x, 4-y] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 500 \\ 31-x-7y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 500 \\ 31-x-7y = 0 \end{cases}$$

$$50y^2 - 400y + 350 = 0$$

$$y_1 = 7 \quad y_2 = 1$$

$$\begin{cases} x = -18 \\ y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 \\ y = 1 \end{cases}$$

Odpowiedź: Pozostałe wierzchołki rombu mają współrzędne: $B = (24, 1)$, $C = (4, 11)$ i $D = (-18, 7)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze

do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie współrzędnych wierzchołka C oraz długości przekątnej AC (lub jej połowy):

$$C = (4, 11) \quad |AC| = 10\sqrt{2} \quad (|AS| = 5\sqrt{2}).$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie długości drugiej przekątnej $|BD| = 30\sqrt{2}$ oraz długości boku rombu, np.

$$|AD| = 10\sqrt{5}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 pkt

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu B (D) i przekształcenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą:

$$\begin{cases} |AD|^2 = 500 \\ \vec{SA} \circ \vec{SD} = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - 8y + 7 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 6x - 432 = 0.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 pkt

Rozwiązanie bezbłędne 6 pkt

Pozostałe wierzchołki rombu mają współrzędne: $B = (24, 1)$, $C = (4, 11)$ i $D = (-18, 7)$.

Zadanie 11 (5 pkt)

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny i $a + b + c = 26$, zaś ciąg $(a - 5, b - 4, c - 11)$ jest arytmetyczny. Oblicz a , b , c .

I sposób rozwiązania

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie: $b^2 = a \cdot c$, a z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy równanie: $2(b - 4) = (a - 5) + (c - 11)$.

$$\text{Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań: } \begin{cases} 2(b - 4) = (a - 5) + (c - 11) \\ b^2 = a \cdot c \\ a + b + c = 26 \end{cases}.$$

Przekształcamy układ równań do równania z jedną niewiadomą: $a^2 - 20a + 36 = 0$ lub $c^2 - 20c + 36 = 0$. Rozwiązujemy równanie i otrzymujemy: $a = 2$ lub $a = 18$ oraz $c = 2$ lub $c = 18$.

Odp. Warunki zadania spełniają liczby: $a = 2$, $b = 6$, $c = 18$ lub $a = 18$, $b = 6$, $c = 2$.

II sposób rozwiązania

Oznaczamy: przez a – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, a przez q – iloraz tego ciągu. Wówczas $b = a \cdot q$, $c = a \cdot q^2$.

Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 26 \\ 2(aq - 4) = (a - 5) + (aq^2 - 11) \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a(1 + q + q^2) = 26 \\ aq^2 - 2aq + a - 8 = 0 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania mamy: $a = \frac{26}{1 + q + q^2}$, zatem

$$\frac{26}{1 + q + q^2} \cdot q^2 - \frac{2 \cdot 26}{1 + q + q^2} \cdot q + \frac{26}{1 + q + q^2} - 8 = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie: $3q^2 - 10q + 3 = 0$. Rozwiązaniem tego równania są liczby: $q = \frac{1}{3}$, $q = 3$.

Dla każdej z tych liczb obliczamy a, b, c .

Warunki zadania spełniają liczby: $a = 2, b = 6, c = 18$ lub $a = 18, b = 6, c = 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (arytmetycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $b^2 = a \cdot c$

albo

- $2(b-4) = (a-5) + (c-11)$

albo

- $2(aq-4) = (a-5) + (aq^2-11)$

albo

- $a + aq + aq^2 = 26$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb a, b, c , np.

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ 2(b-4) = (a-5) + (c-11) \\ a + b + c = 26 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a + a \cdot q + a \cdot q^2 = 26 \\ 2(a \cdot q - 4) = (a-5) + (a \cdot q^2 - 11) \end{cases}$$

Uwaga:

Jeżeli zdający pomyli własności któregośkolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Przekształcenie układu równań do równania z jedną niewiadomą, np.

$$a^2 - 20a + 36 = 0 \quad \text{lub} \quad c^2 - 20c + 36 = 0 \quad \text{lub} \quad 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

Uwaga:

Jeżeli w trakcie doprowadzania układu równań do równania kwadratowego zdający popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje 2 punkty za całe zadanie.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań (na przykład dla $q < 1$) i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste)

Rozwiązanie bezbłędne 5 pkt

$a = 2, b = 6, c = 18$ lub $a = 18, b = 6, c = 2$.

Uwaga:

Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże układ równań i popełni błąd w zredagowaniu odpowiedzi, na przykład: $a = 2$ lub $a = 18$, $b = 6$, $c = 18$ lub $c = 2$, to otrzymuje **4 punkty**.