



Egzamin maturalny CZERWIEC 2011

Schemat oceniania do zadań otwartych

Poziom rozszerzony

Rozwiąż nierówność $|2x-4|+|x-5|\geq 12$.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, 2)$, $\langle 2, 5)$, $\langle 5, \infty)$.

$x \in (-\infty, 2)$	$x \in \langle 2, 5 \rangle$	$x \in \langle 5, \infty \rangle$
$-2x + 4 - x + 5 \geq 12$	$2x - 4 - x + 5 \geq 12$	$2x - 4 + x - 5 \geq 12$
$-3x \geq 3$	$x \geq 11$	$3x \geq 21$
$x \leq -1$		$x \geq 7$

i bierzemy sumę tych przedziałów: $x \in (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$.

Zapisujemy cztery przypadki:

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x-5 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4 < 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4 < 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \\ 2x - 4 + x - 5 \geq 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 5 \\ 3x \geq 21 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 5 \\ x \geq 7 \end{cases}$ $x \in \langle 7, \infty \rangle$	$\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \\ 2x - 4 - x + 5 \geq 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \\ x \geq 11 \end{cases}$ niemożliwe	$\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases}$ niemożliwe	$\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 < 0 \\ -2x + 4 - x + 5 \geq 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ x < 5 \\ -3x \geq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ x < 5 \\ x \leq -1 \end{cases}$ $x \in (-\infty, -1\rangle$
---	---	---	---

Zapisujemy odpowiedź: $x \in (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty, 2)$, $\langle 2, 5 \rangle$, $\langle 5, \infty \rangle$

albo

zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$

Uwaga:

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy **0 punktów**.

Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np:

I. $x \in (-\infty, 2)$ $-2x + 4 - x + 5 \geq 12$

II. $x \in \langle 2, 5 \rangle$ $2x - 4 - x + 5 \geq 12$

III. $x \in \langle 5, \infty \rangle$ $2x - 4 + x - 5 \geq 12$

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x \leq -1$ lub $x \geq 7$

Uwaga:

1. We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 pkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.
2. Jeżeli zdający przy przekształcaniu nierówności podanej w treści zadania popełni błąd (np. $|2(x - 4)| + |x - 5| \geq 12$), to otrzymuje **1 punkt mniej** niż przewidziany w schemacie w danej kategorii rozwiązania.

Zadanie 2. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $2x^2 - (m-2)x - 3m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$:

$$(m-2)^2 + 24m > 0,$$

$$m^2 + 20m + 4 > 0$$

$$m \in (-\infty, -10 - 4\sqrt{6}) \cup (-10 + 4\sqrt{6}, +\infty).$$

Rozwiązujemy nierówność $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$.

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 25$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} \leq 25$$

$$m^2 + 20m - 96 \leq 0$$

Otrzymujemy $m \in \langle -24, 4 \rangle$.

Częścią wspólną obu zbiorów jest suma przedziałów $\langle -24, -10 - 4\sqrt{6} \rangle \cup (-10 + 4\sqrt{6}, 4)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

- a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, gdzie $\Delta = m^2 + 20m + 4$, czyli $m^2 + 20m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -10 - 4\sqrt{6}) \cup (-10 + 4\sqrt{6}, +\infty)$.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

- b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$, $m \in \langle -24, 4 \rangle$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

- c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b).

Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

- zapisanie nierówności $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$ w postaci równoważnej $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 25$ albo
- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

$$\left(\frac{m-2-\sqrt{m^2+20m+4}}{4}\right)^2 + \left(\frac{m-2+\sqrt{m^2+20m+4}}{4}\right)^2 -$$
$$-2 \cdot \frac{m-2-\sqrt{m^2+20m+4}}{4} \cdot \frac{m-2+\sqrt{m^2+20m+4}}{4} \leq 25$$

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania 2 pkt
Doprowadzenie nierówności do postaci $m^2 + 20m - 96 \leq 0$.

Rozwiązanie bezbłędne części b) 3 pkt
Rozwiązanie nierówności: $m \in \langle -24, 4 \rangle$

Rozwiązanie pełne 5 pkt
Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i zapisanie odpowiedzi:
 $m \in \langle -24, -10 - 4\sqrt{6} \rangle \cup \langle -10 + 4\sqrt{6}, 4 \rangle$.

Uwaga. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań obu nierówności, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 3. (5 pkt)

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny. Ciąg $(3a+3, 2b, c-12)$ jest arytmetyczny i suma jego dwóch pierwszych wyrazów jest równa trzeciemu. Oblicz a, b, c .

I sposób rozwiązania

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie: $b^2 = a \cdot c$, a z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy równanie: $2(2b) = (3a+3) + (c-12)$.

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:
$$\begin{cases} (3a+3) + (2b) = (c-12) \\ b^2 = a \cdot c \\ 2(2b) = (3a+3) + (c-12) \end{cases}.$$

Przekształcamy układ równań do równania z jedną niewiadomą: $(3a+3)^2 = a(9a+21)$ lub

$$b^2 = \left(\frac{1}{3}b - 1\right)(3b+12) \text{ lub } \left(\frac{1}{3}c - 4\right)^2 = c\left(\frac{1}{9}c - \frac{21}{9}\right).$$

Rozwiązujemy równania i otrzymujemy: $a = 3$ lub $b = 12$ lub $c = 48$.

Warunki zadania spełniają liczby: $a = 3, b = 12, c = 48$.

II sposób rozwiązania

Oznaczamy: przez a – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, a przez q – iloraz tego ciągu. Wówczas $b = a \cdot q, c = a \cdot q^2$.

Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2(2aq) = (3a+3) + (aq^2-12) \\ (3a+3) + (2aq) = aq^2-12 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a(q^2-4q+3) = 9 \\ a(q^2-2q-3) = 15 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania mamy $a = \frac{9}{q^2-4q+3}$, zatem $\frac{9}{q^2-4q+3} \cdot (q^2-2q-3) = 15$.

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie $q^2 - 7q + 12 = 0$.

Rozwiązaniem tego równania są liczby: $q = 3$ oraz $q = 4$. Zauważamy, że dla $q = 3$ pierwsze równanie jest sprzeczne.

Warunki zadania spełniają liczby: $a = 3, b = 12, c = 48$.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (arytmetycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $b^2 = a \cdot c$

albo

- $2(2b) = (3a+3) + (c-12)$

albo

- $(3a+3) + (2b) = (c-12)$

albo

- $2(2aq) = (3a+3) + (aq^2 - 12)$

albo

- $(3a+3) + (2aq) = aq^2 - 12$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie układu równań z trzema lub dwiema niewiadomymi np.:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 4b = 3a + 3 + c - 12 \\ 3a + 3 + 2b = c - 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 4aq = 3a + 3 + aq^2 - 12 \\ 3a + 3 + 2aq = aq^2 - 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a(q^2 - 2q - 3) = 15 \\ a(q^2 - 4q + 3) = 9 \end{cases}$$

Uwaga:

Jeżeli zdający pomyli własności któregośkolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Doprowadzenie układu równań do równania z jedną niewiadomą, np.

$$(3a+3)^2 = a(9a+21) \quad \text{lub} \quad b^2 = \left(\frac{1}{3}b-1\right)(3b+12) \quad \text{lub} \quad q^2 - 7q + 12 = 0$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Rozwiązanie bezbłędne 5 pkt

$$a = 3, \quad b = 12, \quad c = 48.$$

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje układ z niewiadomymi a, q i nie odrzuci rozwiązania $q = 3$, to otrzymuje 4 punkty.

Zadanie 4. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja

trygonometryczna $6(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 1 = 0$

$$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$$

$$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, np. $t = \cos x$, gdzie $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe

$$6t^2 - 7t - 5 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\Delta = 49 - 4 \cdot (-5) \cdot 6 = 169 \quad \sqrt{\Delta} = 13$$

$$t_1 = \frac{7-13}{12} = -\frac{1}{2} \quad t_2 = \frac{7+13}{12} = \frac{5}{3}$$

Odrzucamy rozwiązanie $t_2 = \frac{5}{3}$, ponieważ $\frac{5}{3} \notin \langle -1, 1 \rangle$

Rozwiązujemy równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$

Zapisujemy rozwiązania równania w podanym przedziale

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{4}{3}\pi$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.:

$$-6\cos^2 x + 7\cos x + 5 = 0 \text{ lub } 6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t = \cos x$, zapisanie równania w postaci

$$-6t^2 + 7 \cdot t + 5 = 0 \text{ lub } 6t^2 - 7 \cdot t - 5 = 0.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Rozwiązanie równania kwadratowego ($t = \frac{5}{3}$ lub $t = -\frac{1}{2}$) i odrzucenie rozwiązania $t = \frac{5}{3}$.

Uwaga:

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest $\cos x$) i zapisać rozwiązanie w postaci $\cos x = \frac{5}{3}$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$ oraz zapisać, że równanie

$\cos x = \frac{5}{3}$ jest sprzeczne.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Rozwiązanie równania w podanym przedziale:

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{4\pi}{3}$$

albo

$$x = 120^\circ \text{ lub } x = 240^\circ$$

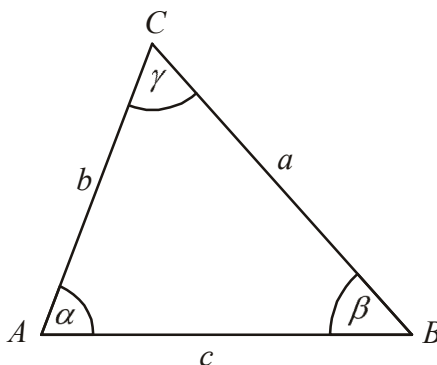
Uwagi:

2. Jeżeli zdający podstawia $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ bez żadnych założeń, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający podniesie obie strony równania $6\cos^2 x - 5 = 7\cos x$ do kwadratu i potem nie sprawdzi rozwiązań, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Nie wymagamy, aby zdający zapisał warunek np. $t \in \langle -1, 1 \rangle$, o ile z dalszego ciągu rozwiązania wynika, że zdający uwzględni go.
5. Jeżeli zdający rozwiąże poprawnie równanie kwadratowe i na tym zakończy, nie odrzucając rozwiązania $\frac{5}{3}$, to otrzymuje **2 punkty**.
6. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania kwadratowego i otrzyma dwa rozwiązania, z których co najmniej jedno należy do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$, konsekwentnie rozwiąże oba równania w podanym przedziale, to otrzymuje **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 5. (4 pkt)

Dany jest trójkąt ostrokątny o bokach a , b , c i kątach α , β , γ (zobacz rysunek).

Wykaż, że $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.



I sposób rozwiązania

Wykorzystujemy twierdzenie cosinusów i zapisujemy zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{ i } \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Przekształcamy zależności do postaci:

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{ i } \quad 2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

Zapisujemy lewą stronę równości w postaci:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta}$$

Wykorzystujemy związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta i przekształcamy zależność do postaci:

$$\frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} = \frac{b \cdot \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}}{a \cdot \frac{\sin \beta}{\operatorname{tg} \beta}} = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{a \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

Wykorzystujemy twierdzenie sinusów $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$ i wykazujemy tezę:

$$\frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{a \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2}$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze

do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zapisanie zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{ i } \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Przekształcenie zależności do postaci:

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{ i } \quad 2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie, że $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta}$

Rozwiązanie pełne 4 pkt
Wykorzystanie twierdzenia sinusów i wykazanie tezy.

II sposób rozwiązania

Wykorzystujemy związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta i przekształcamy zależność do postaci:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta}$$

Wykorzystujemy twierdzenie sinusów $\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ i zapisujemy zależność w postaci:

$$\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{b \cdot \cos \alpha}{a \cdot \cos \beta}$$

Wykorzystujemy twierdzenie cosinusów i zapisujemy zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{ i } \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Przekształcamy zależności do postaci:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{ i } \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Wykazujemy tezę:

$$\frac{b \cdot \cos \alpha}{a \cdot \cos \beta} = \frac{b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zapisanie, że $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta}$ i wykorzystanie twierdzenia sinusów: $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{ i } \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Przekształcenie zależności do postaci:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{ i } \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zadanie 6. (3 pkt)

Wykaż, że nie istnieje wielomian $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, który spełnia warunki: $W(2)=3$ i $W(-2)=2$.

I sposób rozwiązania

Zapisujemy wielomian stopnia trzeciego w postaci ogólnej $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Ponieważ $W(2)=3$, to $8a+4b+2c+d=3$ i ponieważ $W(-2)=2$, to $-8a+4b-2c+d=2$.

Po dodaniu otrzymanych równań stronami otrzymujemy równanie $8b+2d=5$, czyli $2(4b+d)=5$. Ponieważ prawa strona równania jest nieparzysta, a lewa jest parzysta (b, d są zgodnie z założeniem liczbami całkowitymi), to zapisujemy wniosek, że taki wielomian nie istnieje.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy wielomian stopnia trzeciego w postaci ogólnej $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Ponieważ $W(2)=3$, to $8a+4b+2c+d=3$, zatem d musi być liczbą nieparzystą.

Ponieważ $W(-2)=2$, to $-8a+4b-2c+d=2$, zatem d musi być liczbą parzystą.

Zatem nie istnieje wielomian spełniający warunki zadania.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Uwaga:

Jeżeli zdający rozpatruje wielomian stopnia drugiego zamiast stopnia trzeciego, to otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zapisanie ogólnej postaci wielomianu trzeciego stopnia: $W(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi a, b, c, d :

$$\begin{cases} 8a+4b+2c+d=3 \\ -8a+4b-2c+d=2 \end{cases}$$

Rozwiązanie pełne 3 pkt

Dodanie stronami obu równań: $8b+2d=5$.

oraz

- zauważenie, że lewa strona równania $8b+2d=5$ jest parzysta, a prawa nieparzysta i sformułowanie wniosku, że nie istnieje wielomian spełniający podane warunki albo
- zauważenie, że d w równaniu $8a+4b+2c+d=3$ musi być nieparzyste, a w równaniu $-8a+4b-2c+d=2$ parzyste i sformułowanie wniosku, że nie istnieje wielomian spełniający podane warunki.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zauważy, że d w równaniu $8a + 4b + 2c + d = 3$ jest nieparzyste, a w równaniu $-8a + 4b - 2c + d = 2$ jest parzyste i nie sformułuje wniosku, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający zauważy, że lewa strona równania $8b + 2d = 5$ jest parzysta, a prawa nieparzysta i nie sformułuje wniosku, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 7. (4 pkt)

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $|AC| = 5$ i $|AB| = 8$. Pole tego trójkąta jest równe $10\sqrt{3}$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie

Oznaczamy $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ oraz R - promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Obliczamy $\sin \alpha$ ze wzoru na pole trójkąta;

$$\frac{5 \cdot 8 \cdot \sin \alpha}{2} = 10\sqrt{3} \quad \text{stąd} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha \text{ jest kątem ostrym więc } \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

Korzystamy z tw. cosinusów do obliczenia długości boku BC :

$$|BC|^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}, \quad |BC| = 7$$

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC obliczamy korzystając z tw. sinusów:

$$2R = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{czyli} \quad R = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie $\sin \alpha$: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Istotny postęp 2 pkt

- obliczenie $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

albo

- obliczenie długości odcinków, na jakie wysokość trójkąta dzieli bok AB : $|AD| = 2,5$ i $|BD| = 5,5$ lub dla boku AC : $|AE| = 4$ i $|EC| = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie $|BC|$: $|BC| = 7$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

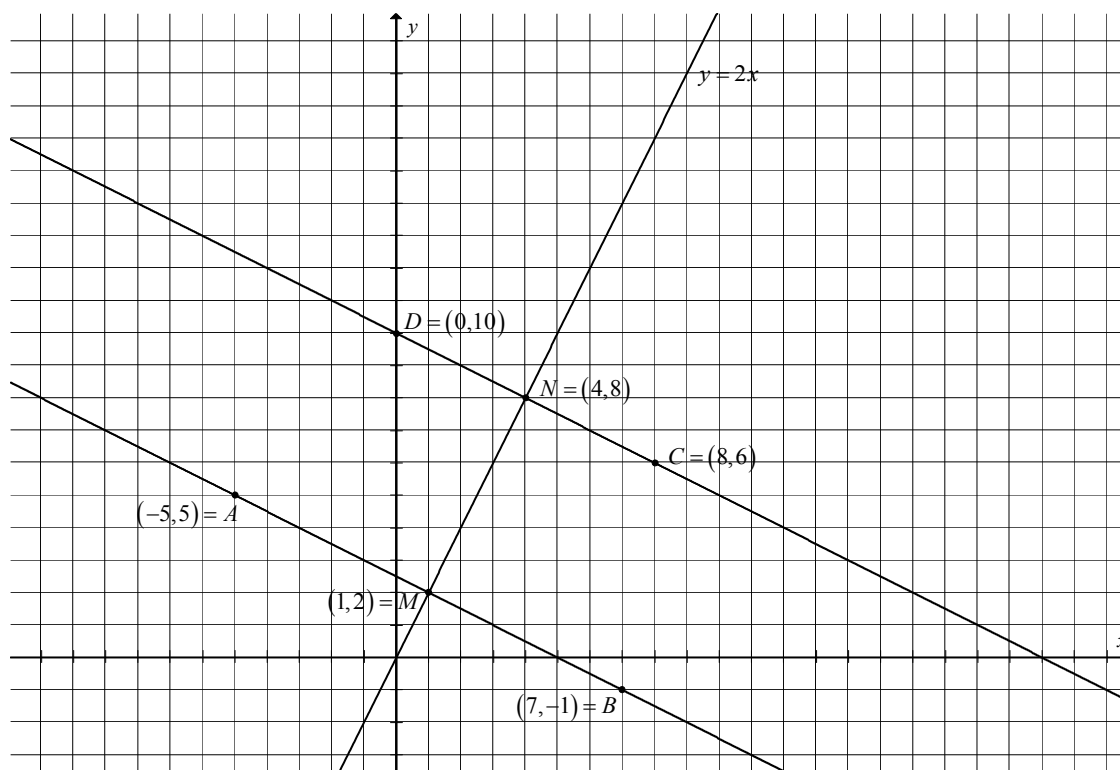
Obliczenie: $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Uwaga:

1. Jeżeli zdający w obliczeniach popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy promień okręgu opisanego na trójkącie ABC , to przyznajemy **4 punkty**.

Zadanie 8. (5 pkt)

Punkty $A = (-5, 5)$, $C = (8, 6)$ są przeciwległymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Prosta o równaniu $y = 2x$ jest osią symetrii tego trapezu. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D oraz pole tego trapezu.



I sposób rozwiązania (punkty symetryczne względem osi symetrii)

Wyznaczamy równania prostych AB i CD prostych do osi symetrii trapezu.

prosta AB

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$\frac{5}{2} = b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

prosta CD

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$10 = b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 10$$

Wyznaczamy współrzędne punktu M leżącego na prostej AB i osi symetrii trapezu

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \quad M = (1, 2)$$

Punkt B leży na prostej AB , $B = \left(x, -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)$, $|AM| = |MB|$ możemy więc zapisać równość

$$(1+5)^2 + (2-5)^2 = (x-1)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x - 2\right)^2$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 7$$

albo

wykorzystujemy własność: punkt M jest środkiem odcinka AB : $(1, 2) = \left(\frac{-5 + x_B}{2}, \frac{5 + y_B}{2} \right)$

Współrzędne punktu B to $B = (7, -1)$.

Analogicznie postępujemy przy obliczeniu współrzędnych wierzchołka D .

Wyznaczamy współrzędne punktu N leżącego na prostej CD i osi symetrii trapezu.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + 10 \end{cases} \quad N = (4, 8)$$

D leży na prostej CD , $D = \left(x, -\frac{1}{2}x + 10 \right) \quad |CN| = |ND|$

$$(4 - 8)^2 + (8 - 6)^2 = (x - 4)^2 + \left(10 - \frac{1}{2}x - 8 \right)^2$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 10x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 8$$

albo

wykorzystujemy własność: punkt N jest środkiem odcinka CD : $(4, 8) = \left(\frac{8 + x_D}{2}, \frac{6 + y_D}{2} \right)$

Współrzędne punktu D to $D = (0, 10)$.

W celu wyznaczenia pola trapezu musimy obliczyć długości podstaw i wysokości trapezu.

$$|AB| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \quad |CD| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Długość wysokości h trapezu jest równa, np. odległości wierzchołka C od prostej AB .

$$h = \frac{\left| 4 + 6 - \frac{5}{2} \right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{Obliczamy pole trapezu} \quad P = \frac{6\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{2} \cdot 3\sqrt{5} = 75.$$

Odpowiedź: Pole tego trapezu $P = 75$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Wyznaczenie równań prostych AB i CD : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad y = -\frac{1}{2}x + 10$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktów M i N : $M = (1, 2), N = (4, 8)$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie współrzędnych punktów B i D jako symetrycznych do punktów A i C względem prostej $y = 2x$: $B = (7, -1)$, $D = (0, 10)$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie pola trapezu $P = 75$ oraz podanie współrzędnych $B = (7, -1)$, $D = (0, 10)$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający nie wyznaczy współrzędnych wierzchołków B i D , ale obliczy pole trapezu, to przyznajemy **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie długości podstaw oraz wysokość trapezu i nie obliczy pola trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu długości podstaw lub wysokości trapezu i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.

II sposób rozwiązania (prosta i okrąg)

Niech $S = (a, 2a)$ oznacza środek okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.

Środek okręgu opisanego na trapezie leży na osi symetrii trapezu i jest równoodległy od punktów A i C , więc $|AS| = |CS|$.

$$(a+5)^2 + (2a-5)^2 = (a-8)^2 + (2a-6)^2$$

$$30a = 50$$

$$a = \frac{5}{3}$$

$$\text{Środek okręgu } S = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

Obliczamy długość promienia okręgu opisanego na trapezie równoramiennym.

$$r = |AS| = \sqrt{\left(\frac{5}{3} + 5\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 5\right)^2} = \frac{5\sqrt{17}}{3}.$$

Wyznaczamy równania prostych AB i CD prostopadłych do osi symetrii trapezu.

prosta AB

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$\frac{5}{2} = b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

prosta CD

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$10 = b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 10$$

Obliczamy współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu rozwiązując układy równań.

wierzchołek B

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

wierzchołek D

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + 10 \end{cases}$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{425}{9}$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 7$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$A = (-5, 5) \quad B = (7, -1)$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{425}{9}$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 10x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 8$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$D = (0, 10) \quad C = (8, 6)$$

W celu wyznaczenia pola trapezu obliczamy długości podstaw i wysokość trapezu.

$$|AB| = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$|CD| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Wysokość h trapezu jest równa odległości wierzchołka C od prostej AB

$$h = \frac{\left|4 + 6 - \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = 3\sqrt{5}.$$

$$\text{Obliczamy pole trapezu } P = \frac{\sqrt{180} + \sqrt{80}}{2} \cdot 3\sqrt{5} = 75.$$

Odpowiedź: Pole tego trapezu jest równe 75.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzie niewielki, ale konieczny na drodze

do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zapisanie układu równań lub równania, z którego można wyznaczyć współrzędne środka okręgu np.

$$\begin{cases} b = 2a \\ (a+5)^2 + (b-5)^2 = (a-8)^2 + (b-6)^2 \end{cases} \quad \text{albo} \quad (a+5)^2 + (2a-5)^2 = (a-8)^2 + (2a-6)^2$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

$$\text{Obliczenie współrzędnych środka okręgu } S = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ oraz promienia okręgu } r = \frac{5\sqrt{17}}{3}$$

$$\text{i podanie równania okręgu } \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie współrzędnych punktów B i D , np. poprzez rozwiązanie układów równań:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + 10 \end{cases} \quad : B = (7, -1), D = (0, 10)$$

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Obliczenie pola trapezu $P = 75$ oraz podanie współrzędnych $B = (7, -1)$, $D = (0, 10)$.

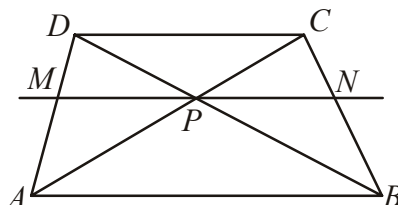
Uwagi:

1. Jeżeli zdający nie wyznaczy współrzędnych wierzchołków B i D , ale obliczy pole trapezu, to przyznajemy **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie długości podstaw oraz wysokość trapezu i nie obliczy pola trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu długości podstaw lub wysokości trapezu i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.

Zadanie 9. (3 pkt)

Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Prosta równoległa do podstaw trapezu, przechodząca przez punkt P , przecina ramiona AD i BC odpowiednio w punktach M i N . Wykaż, że $|MP| = |NP|$.

Rozwiązanie



Założenie: AC, BD przekątne trapezu $ABCD$,
 P – punkt przecięcia przekątnych,
 MN prosta równoległa do podstaw trapezu, punkt P leży na prostej MN .

Teza: $|MP| = |NP|$.

Dowód:

Trójkąt ABD jest podobny do trójkąta MPD (kkk), więc $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|MD|}{|AD|}$.

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta PNC (kkk), więc $\frac{|PN|}{|AB|} = \frac{|NC|}{|BC|}$.

Z twierdzenia Talesa dla prostych AD i BC przeciętych prostymi równoległymi AB, MN i DC zapiszemy proporcję $\frac{|MD|}{|AD|} = \frac{|NC|}{|BC|}$.

Z zapisanych proporcji wnioskujemy, że $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|PN|}{|AB|}$, stąd $|MP| = |NP|$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt

Zauważenie dwóch par trójkątów podobnych: ABD i MPD oraz ABC i PNC i zapisanie

proporcji $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|MD|}{|AD|}$, $\frac{|PN|}{|AB|} = \frac{|NC|}{|BC|}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Skorzystanie z twierdzenia Talesa dla prostych AD i BC przeciętych prostymi równoległymi

AB, MN i DC i zapisanie proporcji $\frac{|MD|}{|AD|} = \frac{|NC|}{|BC|}$.

Uwaga:

Zdający może skorzystać z proporcji $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|BN|}{|NC|}$ i albo z niej wyprowadzić żadaną proporcję albo do niej sprowadzić żadaną proporcję.

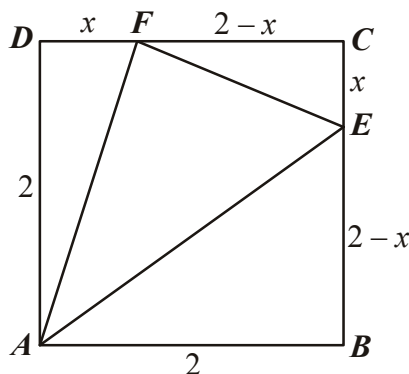
Rozwiązanie pełne 3 pkt

Zapisanie równości $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|NP|}{|AB|}$ i wyprowadzenie wniosku, że $|MP| = |NP|$.

Zadanie 10. (5 pkt)

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku równym 2. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F takie, że $|CE| = |DF| = x$. Oblicz wartość x , dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze i oblicz to pole.

Rozwiązanie



Z warunków zadania $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = 2$, $|CE| = x$ i $|DF| = x$ $0 \leq x \leq 2$.

Określamy długość odcinków $|BE|$ i $|CF|$: $|BE| = 2 - x$, $|CF| = 2 - x$.

Obliczamy pole trójkąta AEF .

$$P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - P_{CEF} - P_{ADF} = 4 - \frac{1}{2}(2-x) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2-x) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

Pole trójkąta AEF jest funkcją zmiennej x : $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ dla $x \in \langle 0, 2 \rangle$. Funkcja ta

osiąga najmniejszą wartość dla $x = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$. Wówczas pole trójkąta AEF jest równe $1\frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zapisanie, że $P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ADF} - P_{CEF} - P_{ABE}$ lub $P_{AEF} = P_{ABCD} - (P_{ADF} + P_{CEF} + P_{ABE})$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zapisanie pól trójkątów ADF , CEF i ABE : $P_{ADF} = x$, $P_{ABE} = 2 - x$

i $P_{CEF} = \frac{-x^2 + 2x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie P_{AEF} jako funkcji x : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Wyznaczenie x , dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x = 1$.

Obliczenie pola trójkąta AEF : $1\frac{1}{2}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu sumy pól trójkątów ADF , ABE i CEF i rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd w obliczeniu odciętej wierzchołka paraboli i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole trójkąta AEF , to otrzymuje **4 punkty**.
3. Nie wymagamy uzasadnienia, że dla znalezionej wartości $x=1$ funkcja przyjmuje minimum (a więc stwierdzenia, że ramiona paraboli są skierowane do góry, czy uzasadnienia, że w jedynym znalezionym miejscu zerowym pochodnej funkcja ma minimum).
4. Jeżeli zdający wyznaczy wartość x , dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze i nie obliczy pola tego trójkąta, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 11. (4 pkt)

Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wszystkich cyfr wylosowanej liczby jest równa 7.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czteroelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1, 2, 3\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny, $|\Omega| = 3^4 = 81$.

Zauważmy, że zdarzeniu A - suma wszystkich czterech cyfr wylosowanej liczby jest równa 7, odpowiada sytuacji, gdy w zapisie liczby występują cyfry 3,2,1,1, albo 1,2,2,2 w dowolnej kolejności.

Stąd $|A| = 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 16$ i $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{81}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zdający zapisze $|\Omega| = 3^4$ albo poda rozkład $7 = 1+1+2+3 = 1+2+2+2$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający zapisze $|\Omega| = 3^4$ i poda rozkład $7 = 1+1+2+3 = 1+2+2+2$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

- Zdający obliczy $|A| = 12 + 4 = 16$ i nie obliczy prawdopodobieństwa.
- albo
- Zdający obliczy prawdopodobieństwo $P(A)$ z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa: $P(A) = \frac{16}{3^4}$ lub $P(A) = \frac{16}{81}$.

Uwagi:

1. Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy obliczy prawdopodobieństwo tylko dla jednego przypadku:

- $7 = 1+1+2+3$, $|A| = 12$, zatem $P(A) = \frac{12}{3^4}$

albo

- $7 = 1+2+2+2$, $|A| = 4$, zatem $P(A) = \frac{4}{3^4}$

2. Zdający otrzymuje 3 punkty, gdy obliczy prawdopodobieństwo $P(A)$ z błędem rachunkowym

3.

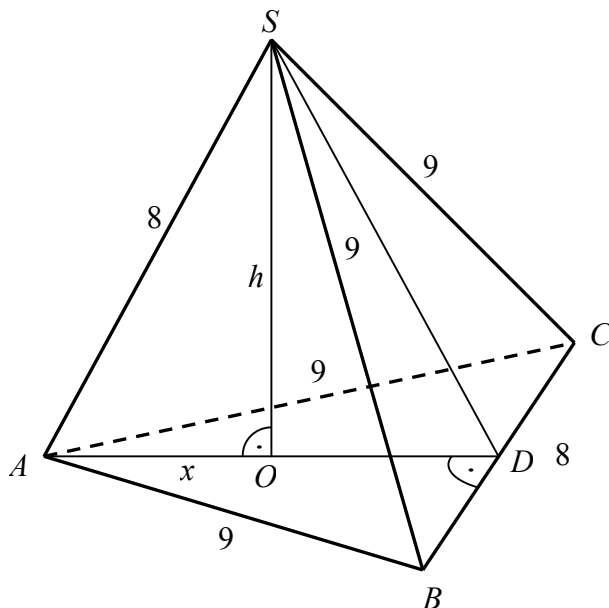
Zadanie 12. (4 pkt)

W ostrosłupie trójkątnym $ABCS$ o podstawie ABC i wierzchołku S dane są:
 $|AB| = |AC| = |BS| = |CS| = 9$ i $|AS| = |BC| = 8$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

I sposób (ostrosłup jako „samodzielna bryła”)

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BDS obliczamy wysokość ściany bocznej BCS :



$$|SD| = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{65}$$

Trójkąty BCS i BCA są przystające, więc

$$|AD| = |SD| = \sqrt{65}$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach AOS i ODS mamy

$$h^2 + x^2 = 8^2 \text{ i } h^2 + (\sqrt{65} - x)^2 = \sqrt{65}^2$$

$$\text{Stąd } h^2 = 64 - x^2 \text{ i } 64 - x^2 + (\sqrt{65} - x)^2 = 65$$

$$64 - x^2 + 65 - 2\sqrt{65}x + x^2 = 65$$

$$x = \frac{32}{\sqrt{65}}, \text{ więc } h^2 = 64 - \left(\frac{32}{\sqrt{65}}\right)^2,$$

$$\text{a stąd } h = \frac{56}{\sqrt{65}}.$$

$$\text{Objętość ostrosłupa jest więc równa } V = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{56}{\sqrt{65}} = \frac{224}{3} = 74 \frac{2}{3}$$

Uwaga. Wysokość ostrosłupa możemy obliczyć inaczej, np.

A. Ze wzoru Herona obliczamy pole trójkąta ADS

$$p = \frac{1}{2}(8 + \sqrt{65} + \sqrt{65}) = 4 + \sqrt{65},$$

$$P_{ADS} = \sqrt{(4 + \sqrt{65})(4 + \sqrt{65} - \sqrt{65})(4 + \sqrt{65} - \sqrt{65})(4 + \sqrt{65} - 8)} = \sqrt{(4 + \sqrt{65})(\sqrt{65} - 4) \cdot 4 \cdot 4} = 4\sqrt{49} = 28$$

ale $P_{ADS} = \frac{1}{2}\sqrt{65} \cdot h$, więc $\frac{1}{2}\sqrt{65} \cdot h = 28$, stąd $h = \frac{56}{\sqrt{65}}$.

B. Trójkąt ADS jest równoramienny, więc z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADE , gdzie E jest środkiem boku AS obliczamy wysokość DE trójkąta ADS

$$|DE| = \sqrt{(\sqrt{65})^2 - 4^2} = 7$$

Wykorzystując dwukrotnie wzór na pole trójkąta ADS mamy

$$P_{ADS} = \frac{1}{2}|AD| \cdot h \text{ oraz } P_{ADS} = \frac{1}{2}|AS| \cdot |DE|, \text{ stąd } \frac{1}{2}\sqrt{65} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7, \text{ więc } h = \frac{56}{\sqrt{65}}$$

To samo uzyskamy wykorzystując podobieństwo trójkątów AOE i AED (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A)

$$\frac{|OS|}{|AS|} = \frac{|ED|}{|AD|}, \text{ czyli } \frac{h}{8} = \frac{7}{\sqrt{65}}, \text{ stąd } h = \frac{56}{\sqrt{65}}$$

Możemy też zapisać sinus kąta przy wierzchołku A raz w trójkącie prostokątnym AOS , drugi raz w trójkącie prostokątnym AED

$$\sin |\sphericalangle A| = \frac{|OS|}{|AS|} \text{ oraz } \sin |\sphericalangle A| = \frac{|ED|}{|AD|}, \text{ stąd } \frac{|OS|}{|AS|} = \frac{|ED|}{|AD|}, \text{ czyli } \frac{h}{8} = \frac{7}{\sqrt{65}}, \text{ więc } h = \frac{56}{\sqrt{65}}$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa $P = 4\sqrt{65}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

- obliczenie wysokości ostrosłupa $h = \frac{56\sqrt{65}}{65}$ i nie obliczenie pola podstawy ostrosłupa

albo

- obliczenie pola podstawy ostrosłupa i wskazanie metody obliczenia wysokości ostrosłupa.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa $h = \frac{56\sqrt{65}}{65}$ oraz pola podstawy ostrosłupa i nie obliczenie

objętości lub obliczenie objętości ostrosłupa z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{224}{3}$.

II sposób (ostrosłup wpisany w prostopadłościan)

Wpiszmy ostrosłup w prostopadłościan o podstawie kwadratowej (zobacz rysunek). Ze wzoru na długość przekątnej kwadratu obliczamy długość krawędzi podstawy prostopadłościanu

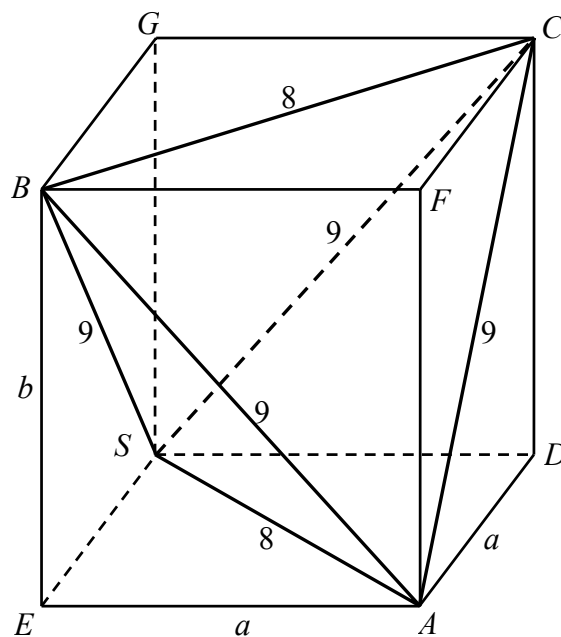
$$a = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABE obliczamy wysokość tego prostopadłościanu

$$b = \sqrt{9^2 - \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{81 - 32} = 7.$$

Objętość ostrosłupa $ABCS$ obliczymy odejmując od objętości prostopadłościanu objętości czterech przystających ostrosłupów: $AESB$, $ADSC$, $BFCA$ i $BGCS$. Wysokość każdego z tych ostrosłupów jest zarazem wysokością prostopadłościanu, a podstawą każdego z nich jest połowa podstawy prostopadłościanu, więc

$$V_{ABCS} = V - 4 \cdot \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V = \frac{1}{3} \cdot a^2b = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 7 = \frac{224}{3} = 74\frac{2}{3}.$$



Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Wpisanie ostrosłupa w prostopadłościan o podstawie kwadratowej.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Obliczenie długości krawędzi prostopadłościanu $a = \frac{8}{\sqrt{2}}$ i $b = 7$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie objętości ostrosłupa $ABCS$ jako różnicy objętości prostopadłościanu i czterech przystających ostrosłupów.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{224}{3}$.