

# KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI Próbna Matura z OPERONEM

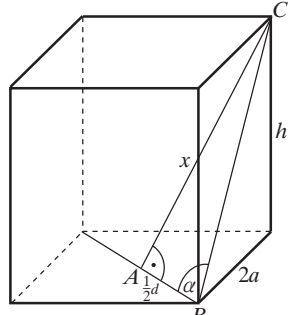
## Matematyka Poziom rozszerzony

Listopad 2011

W niniejszym schemacie oceniania zadań otwartych są prezentowane przykładowe poprawne odpowiedzi. W tego typu zadaniach należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest zgodny z podanym schematem, oraz inne poprawne odpowiedzi w nim nieprzewidziane.

| Numer zadania | Zdający otrzymuje po 1 punkcie za                                                                                                                                                                                                                                                                    | Liczba punktów |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 1.            | <i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i><br>Zdający zapisze równanie w postaci alternatywy.<br>$ 2x - 1  - 2 = 4$ lub $ 2x - 1  - 2 = -4$<br>$ 2x - 1  = 6$ lub $ 2x - 1  = -2$                                                            | 1 pkt          |
|               | <i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i><br>Zdający zauważy, że równanie $ 2x - 1  = -2$ jest sprzeczne.                                                                                                                                                                                     | 2 pkt          |
|               | <i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i><br>Zdający rozwiąże równanie $ 2x - 1  = 6$ .<br>$2x - 1 = 6$ lub $2x - 1 = -6$<br>$x = 3,5$ lub $x = -2,5$                                                                                                                                          | 3 pkt          |
|               | <i>rozwiązanie pełne</i><br>Zdający wskaże ujemny pierwiastek: $x = -2,5$ .                                                                                                                                                                                                                          | 4 pkt          |
| 2.            | <i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i><br>Zdający skorzysta z proporcjonalności boków prostokątów podobnych i rozważy proporcję.<br>$\frac{a}{a+5} = \frac{b}{b+5}$<br>$a(b+5) = b(a+5)$<br>$ab+5a = ba+5b$<br>$a = b$                   | 1 pkt          |
|               | <i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i><br>Zdający zapisze drugą proporcję wynikającą z podobieństwa czworokątów i sprowadzi ją do prostszej postaci.<br>$\frac{a}{b+5} = \frac{b}{a+5}$<br>$a^2 + 5a = b^2 + 5b$<br>$a^2 - b^2 + 5a - 5b = 0$                                              | 2 pkt          |
|               | <i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i><br>Zdający przekształci odpowiednio otrzymane wyrażenie, aby znaleźć zależność między bokami $a$ , $b$ .<br>$(a-b)(a+b) + 5(a-b) = 0$<br>$(a-b)(a+b+5) = 0$<br>$a = b$ lub $a+b = -5$<br>Warunek $a+b = -5$ nie może być spełniony, gdyż $a+b > 0$ . | 3 pkt          |

| Numer zadania | Zdający otrzymuje po 1 punkcie za                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Liczba punktów |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
|               | <p><b>rozwiązanie pełne</b><br/>Zdający stwierdzi, iż z równości <math>a = b</math> wynika, że pierwszy prostokąt jest kwadratem. Skoro <math>a = b</math>, to <math>a + 5 = b + 5</math>, zatem drugi prostokąt też jest kwadratem.</p>                                                                                                                                                                                                                                                               | 4 pkt          |
| 3.            | <p><b>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</b><br/>Zdający zauważy, że aby wyrażenie <math>\frac{1}{2\operatorname{tg} x}</math> miało sens, to <math>\operatorname{tg} x \neq 0</math> dla <math>x \neq k\pi</math> oraz <math>x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi</math> (tangens jest wtedy określony).</p>                                                                                                                                          | 1 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</b><br/>Zdający wykorzysta własność kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego – zapisze odpowiedni warunek i przekształci go tak, aby otrzymać wyrażenie zawierające tylko jedną funkcję trygonometryczną.<br/>Np.:<br/> <math display="block">\cos^2 x = \sin x \cdot \frac{1}{2\operatorname{tg} x}</math> <math display="block">\cos^2 x = \sin x \cdot \frac{1}{2 \frac{\sin x}{\cos x}}</math> <math display="block">2 \cos^2 x = \cos x</math> </p> | 2 pkt          |
|               | <p><b>pokonanie zasadniczych trudności zadania</b><br/>Zdający przedstawi równanie w formie alternatywy.<br/><math>\cos x = 0</math> lub <math>2 \cos x - 1 = 0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 3 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie prawie całkowite</b><br/>Zdający rozwiąże uzyskane równania.<br/> <math>x = \frac{\pi}{2} + k\pi</math> lub <math>x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi</math> lub <math>x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi</math>, gdzie <math>k \in \mathbb{C}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                              | 4 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie pełne</b><br/>Zdający wybierze spośród uzyskanych rozwiązań właściwe i zapisze odpowiedź.<br/> <math>x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi</math> lub <math>x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi</math>, gdzie <math>k \in \mathbb{C}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                           | 5 pkt          |
| 4.            | <p><b>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</b><br/>Zdający wykorzysta wzór na zamianę podstawy logarytmu i zapisze nierówność w postaci <math>\log^2(\pi a) + \log^2(\pi + a) \geq 2 \log(\pi + a) - 1</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                              | 1 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</b><br/>Zdający zapisze nierówność w równoważnej postaci<br/> <math>\log^2(\pi a) + \log^2(\pi + a) - 2 \log(\pi + a) + 1 \geq 0</math>,<br/>aby wykazać, że lewa strona nierówności jest większa bądź równa zero.</p>                                                                                                                                                                                                                                 | 2 pkt          |
|               | <p><b>pokonanie zasadniczych trudności zadania</b><br/>Zdający zapisze lewą stronę nierówności w postaci sumy kwadratów dwóch wyrażeń<br/> <math>[\log(\pi a)]^2 + [\log(\pi + a) - 1]^2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 3 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie pełne</b><br/>Zdający zauważy, że suma kwadratów dwóch liczb jest zawsze liczbą nieujemną i wyprowadzi stąd wniosek, że<br/> <math>[\log(\pi a)]^2 + [\log(\pi + a) - 1]^2 \geq 0</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 4 pkt          |

| Numer zadania | Zdający otrzymuje po 1 punkcie za                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Liczba punktów |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 5.            | <p><i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i></p> <p>Zdający znajdzie współrzędne punktu <math>C</math> jako współrzędne wierzchołka paraboli.</p> $x = \frac{6}{2} = 3, y = 9 - 18 = -9$ $C = (3, -9)$                                                                                                                                                                                                                                 | 1 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i></p> <p>Zdający zauważy, że punkty <math>A, B</math> leżą na prostych przechodzących przez punkt <math>C</math> oraz nachylonych do osi <math>OX</math> pod kątem odpowiednio <math>60^\circ</math> i <math>120^\circ</math> (jako wierzchołki trójkąta równobocznego) i określi, że szuka np. współrzędnych punktu <math>A</math> leżącego na prostej <math>p</math> nachylonej do osi <math>OX</math> pod kątem <math>60^\circ</math>.</p> | 2 pkt          |
|               | <p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i></p> <p>Zdający znajdzie równanie prostej <math>p</math>.</p> $y = \sqrt{3}x + b$ $-9 = 3\sqrt{3} + b$ $b = -9 - 3\sqrt{3}$ $y = \sqrt{3}x - 9 - 3\sqrt{3}$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 3 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie prawie całkowite</i></p> <p>Zdający znajdzie pierwszą współrzędną punktu <math>A</math>, wykorzystując fakt, że punkt leży na paraboli i prostej <math>p</math>.</p> $x^2 - 6x = \sqrt{3}x - 9 - 3\sqrt{3}$ $x^2 - x(6 + \sqrt{3}) + 9 + 3\sqrt{3} = 0$ $\Delta = 3$ $x = 3 \text{ lub } x = 3 + \sqrt{3}$ <p>Zdający zauważy, że liczba 3 to pierwsza współrzędna punktu <math>C</math>, zatem w dalszych rozważaniach uwzględni liczbę <math>3 + \sqrt{3}</math>.</p>       | 4 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie pełne</i></p> <p>Zdający znajdzie drugą współrzędną punktu <math>A</math>.</p> $y = (3 + \sqrt{3})^2 - 6(3 + \sqrt{3}) = -6$ <p>Zdający poda obie współrzędne punktu <math>A</math>.</p> $A = (3 + \sqrt{3}, -6)$                                                                                                                                                                                                                                                             | 5 pkt          |
| 6.            | <p><i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i></p> <div style="text-align: right;">  </div> <p>Zdający obliczy długość połowy przekątnej podstawy.</p> $\frac{1}{2}d = a\sqrt{2}$                                                                                                                                                                    | 1 pkt          |

| Numer zadania | Zdający otrzymuje po 1 punkcie za                                                                                                                                                                                                                                                                       | Liczba punktów |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
|               | <p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i><br/>Zdający zauważy, że trójkąt <math>ABC</math> jest prostokątny i obliczy długość odcinka <math>x</math>.</p> $\frac{x}{a\sqrt{2}} = \operatorname{tg} \alpha$ $x = a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$                                     | 2 pkt          |
|               | <p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i><br/>Zdający obliczy wysokość graniastostupa.</p> $h^2 + (a\sqrt{2})^2 = x^2$ $h = \sqrt{2a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2a^2}$                                                                                                                     | 3 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie pełne</i><br/>Zdający obliczy objętość graniastostupa.</p> $V = (2a)^2 \cdot \sqrt{2a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2a^2} = 4a^2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = 4\sqrt{2} \cdot a^3 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$                      | 4 pkt          |
| 7.            | <p><i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i><br/>Zdający określi liczbę zdarzeń elementarnych – liczbę sposobów wyboru 4 spośród 20 piosenek.</p> $\overline{\Omega} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845$ | 1 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i><br/>Zdający rozważy zdarzenie przeciwne – uczestnik wysłuchał 4 piosenek spośród 8, których nie zna, i określi liczbę zdarzeń sprzyjających.</p> $\overline{A} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$                  | 2 pkt          |
|               | <p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i><br/>Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.</p> $P(A) = \frac{70}{4845}$                                                                                                                                                           | 3 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie prawie całkowite</i><br/>Zdający obliczy prawdopodobieństwo rozważanego zdarzenia.</p> $P(B) = 1 - \frac{70}{4845} = \frac{4775}{4845}$                                                                                                                                               | 4 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie pełne</i><br/>Zdający podaje wynik z żadaną dokładnością.</p> $P(B) = 0,9855... \approx 0,99$                                                                                                                                                                                         | 5 pkt          |
| 8.            | <p><i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i><br/>Zdający znajdzie współrzędne punktu przecięcia prostych.</p> $\begin{cases} y = -x \\ y = x + k \end{cases}$ $-x = x + k$ $x = -\frac{k}{2}, y = \frac{k}{2}$                                 | 1 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i><br/>Zdający skorzysta z tego, że punkt przecięcia prostych musi należeć do koła i przekształci uzyskaną nierówność do najprostszej postaci.</p> $\left(1 - \frac{k}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{k}{2}\right)^2 \leq 10$ $k^2 \leq 16$             | 2 pkt          |

| Numer zadania | Zdający otrzymuje po 1 punkcie za                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Liczba punktów |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
|               | <p><b>pokonanie zasadniczych trudności zadania</b><br/>Zdający zapisze uzyskaną nierówność w postaci <math>(k - 4)(k + 4) \leq 0</math> (zdający może zaznaczyć te liczby na rysunku).</p>                                                                                                                                                                                                                                      | 3 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie pełne</b><br/>Zdający podaje rozwiązanie.<br/><math>k \in \langle -4, 4 \rangle</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 4 pkt          |
| 9.            | <p><b>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</b><br/>Zdający znajdzie współczynniki wielomianu, korzystając z tego, że liczby <math>-1, 2</math> są pierwiastkami wielomianu.<br/> <math display="block">\begin{cases} -1 + a - b + 6 = 0 \\ 8 + 4a + 2b + 6 = 0 \end{cases}</math> <math>a = -4, b = 1</math></p>                                                         | 1 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</b><br/>Zdający znajdzie trzeci pierwiastek wielomianu <math>W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6</math>, stosując twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.<br/> <math>W(3) = 27 - 36 + 3 + 6 = 0</math><br/> <math>x = 3</math></p>                                                                                                               | 2 pkt          |
|               | <p><b>pokonanie zasadniczych trudności zadania</b><br/>Zdający zapisze wielomian oraz nierówność w postaci iloczynowej.<br/> <math>W(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)</math><br/> <math>(x + 1)(x - 2)(x - 3) &gt; 0</math></p>                                                                                                                                                                                                       | 3 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie prawie całkowite</b><br/>Zdający określi przedziały (może zaznaczyć je np. na osi liczbowej), w których będzie poszukiwał wartości dodatnich wyrażenia <math>(x + 1)(x - 2)(x - 3)</math>.<br/>           1. <math>(-\infty, -1)</math><br/>           2. <math>\langle -1, 2 \rangle</math><br/>           3. <math>\langle 2, 3 \rangle</math><br/>           4. <math>\langle 3, \infty \rangle</math></p> | 4 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)</b><br/>Np. źle zaznaczone końce jednego z przedziałów; błędne obliczenie jednego z pierwiastków wielomianu; błąd w obliczeniu współczynników wielomianu.</p>                                                                                                                                        | 5 pkt          |
|               | <p><b>rozwiązanie pełne</b><br/>Zdający określi, kiedy rozpatrywane wyrażenie przyjmuje wartości dodatnie (np. za pomocą siatki znaków albo odpowiedniego „wężyka”) i zapisze odpowiedź.<br/> <math>x \in (-1, 2) \cup (3, \infty)</math></p>                                                                                                                                                                                   | 6 pkt          |
| 10.           | <p><b>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</b><br/>Zdający rozważy przypadek, gdy analizowane równanie jest równaniem liniowym.<br/> <math>m - 1 = 0</math><br/> <math>m = 1</math><br/> <math>4x + 1 + 4 = 0</math><br/> <math>x = -\frac{5}{4}</math></p>                                                                                                              | 1 pkt          |

| Numer zadania | Zdający otrzymuje po 1 punkcie za                                                                                                                                                                                                                                                                       | Liczba punktów |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
|               | <p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i><br/>Zdający założy, że rozpatruje równanie kwadratowe i zapisuje jego wyróżnik.<br/><math>m \neq 1</math><br/><math>\Delta = [2(m+1)]^2 - 4(m-1)(m+4) = -4m + 20</math></p>                                                                         | 2 pkt          |
|               | <p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i><br/>Zdający zauważa, że równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, gdy wyróżnik jest równy zero.<br/><math>-4m + 20 = 0</math><br/><math>m = 5</math></p>                                                                                             | 3 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie prawie całkowite</i><br/>Zdający sprawdza, czy znalezione rozwiązanie spełnia zakładane warunki <math>m = 5 \neq 1</math>.</p>                                                                                                                                                        | 4 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie pełne</i><br/>Zdający podaje rozwiązanie.<br/><math>m = 1</math> lub <math>m = 5</math></p>                                                                                                                                                                                           | 5 pkt          |
| 11.           | <p><i>rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</i><br/>Zdający znajduje sinus kąta zawartego między bokami <math>a</math>, <math>b</math>.<br/><math>\frac{1}{2}ab \sin \alpha = \frac{1}{4}ab</math><br/><math>\sin \alpha = \frac{1}{2}</math></p> | 1 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</i><br/>Zdający znajduje miarę kąta zawartego między bokami <math>a</math> i <math>b</math>.<br/><math>\alpha = 30^\circ</math> lub <math>\alpha = 150^\circ</math></p>                                                                                 | 2 pkt          |
|               | <p><i>pokonanie zasadniczych trudności zadania</i><br/>Zdający wykorzystuje twierdzenie cosinusów do znalezienia długości <math>c</math> trzeciego boku trójkąta.<br/><math>c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 30^\circ</math> lub <math>c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 150^\circ</math></p>                        | 3 pkt          |
|               | <p><i>rozwiązanie pełne</i><br/>Zdający podaje rozwiązanie.<br/><math>c = \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}}</math> lub <math>c = \sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}</math></p>                                                                                                                                   | 4 pkt          |