

Przykładowe rozwiązania

(E. Ludwikowska, M. Zygora, M. Walkowiak)

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie: $2 \cos^2 x - 2 \cos^2 x \sin x = 1 - \sin x$, w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}2 \cos^2 x - 2 \cos^2 x \sin x &= 1 - \sin x \\2 \cos^2 x (1 - \sin x) - (1 - \sin x) &= 0 \\(1 - \sin x)(2 \cos^2 x - 1) &= 0 \\(1 - \sin x) = 0 \text{ lub } (\sqrt{2} \cos x + 1) = 0 \text{ lub } (\sqrt{2} \cos x - 1) &= 0 \\ \sin x = 1 \text{ lub } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Uwzględniając, że $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ otrzymujemy

$$\text{Odp.: } x = \frac{\pi}{4} \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} \text{ lub } x = \frac{3\pi}{4} \text{ lub } x = \frac{5\pi}{4} \text{ lub } x = \frac{7\pi}{4}.$$

Zadanie 2.

Dany jest czworokąt $ABCD$. Niech S będzie punktem przecięcia jego przekątnych. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy,

$$\text{gdy } \frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}.$$

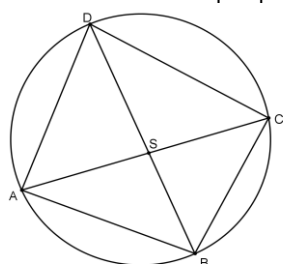
Rozwiązanie:

Cz.I. Udowodnienie, że jeżeli czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg, to

$$\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}. (\Rightarrow)$$

Zakładamy, że czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg.

Udowodnimy, że $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, gdzie S jest punktem przecięcia jego przekątnych.



Zauważmy, że $\angle ADS = \angle ACB$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku).

$\angle DSA = \angle BSC$ (kąty wierzchołkowe).

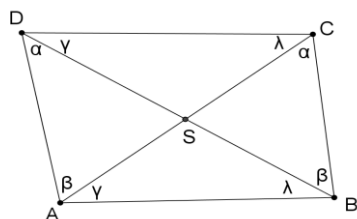
Z tego wynika, że trójkąt DSA jest podobny do trójkąta BSC (na mocy cechy kk).

Zatem z podobieństwa trójkątów wynika, że $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, co należało udowodnić.

Cz.II .Udowodnienie, że jeżeli $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg. ($\Leftarrow$)

Zakładamy teraz, że $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$.

Udowodnimy, że na tym czworokącie można opisać okrąg.



Ponieważ $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$ i $\angle ASD = \angle BSC$ (kąty wierzchołkowe), zatem trójkąty ASD oraz BSC są podobne (na mocy cechy bkb).

Z tego wynika, że $\angle ADS = \angle BCS = \alpha$ oraz $\angle DAS = \angle SBC = \beta$, również $\angle ASB = \angle DSC$ (kąty wierzchołkowe).

Skoro $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to również $\frac{|AS|}{|BS|} = \frac{|DS|}{|CS|}$.

Zatem trójkąty DSC oraz BSA są podobne (na mocy cechy bkb).

Stąd $\angle CDS = \angle SAB = \gamma$ oraz $\angle ABS = \angle DCS = \lambda$.

Mamy więc

$\angle BAD + \angle BCD = \gamma + \beta + \lambda + \alpha$ oraz $\angle ABC + \angle CDA = \lambda + \beta + \gamma + \alpha$.

Sumy przeciwległych kątów są zatem równe, a więc na mocy twierdzenia na tym czworokącie można opisać okrąg, co należało udowodnić.

Zadanie 3.

Dane są funkcje $f(x) = \frac{2x+b}{ax+1}$ oraz $g(x) = \frac{ax+c}{ax+1}$, o których wiadomo, że ich wykresy mają punkt wspólny $P(-9, \frac{11}{13})$, a miejscem zerowym funkcji g jest liczba: $-\frac{5}{3}$. Wyznacz wartości parametrów a , b , c .

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy fakt, że miejscem zerowym funkcji g jest liczba $-\frac{5}{3}$:

$$0 = \frac{a \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + c}{a \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 1}$$

stąd $-\frac{5}{3}a + c = 0$, czyli $c = \frac{5}{3}a$.

Zapisujemy zależność wynikającą z faktu, że punkt $P = \left(-9, \frac{11}{13}\right)$ należy do funkcji g :

$$\frac{11}{13} = \frac{-9a+c}{-9a+1}.$$

Z proporcji: $11(-9a+1) = 13(-9a+c)$

$$-99a+11 = -117a+13c$$

$$-99a + 117a = 13c - 11$$

$$18a = 13c - 11.$$

Zatem tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} c = \frac{5}{3}a \\ 18a = 13c - 11 \end{cases}.$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$\begin{cases} c = \frac{5}{3}a \\ 18a = 13\left(\frac{5}{3}a\right) - 11 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy drugie równanie układu:

$$18a = \frac{65}{3}a - 11 \quad / \cdot 3$$

$$54a = 65a - 33$$

$$-11a = -33 \quad / : (-11)$$

$$a = 3$$

Podstawiamy wyznaczone a do pierwszego równania i otrzymujemy $c = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5$.

Następnie wykorzystujemy fakt, że punkt P należy do funkcji f i obliczamy b :

$$\frac{11}{13} = \frac{2 \cdot (-9) + b}{3 \cdot (-9) + 1}$$

$$\frac{11}{13} = \frac{-18 + b}{-26}$$

$$-286 = -234 + 13b$$

$$-13b = 52 \quad / : (-13)$$

$$b = -4.$$

Odp.: $a = 3, b = -4, c = 5$.

Zadanie 4.

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos x + |\sin x|}{\cos x}$ dla $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Podaj zbiór rozwiązań nierówności $0 \leq f(x) < 2$.

Rozwiązanie:

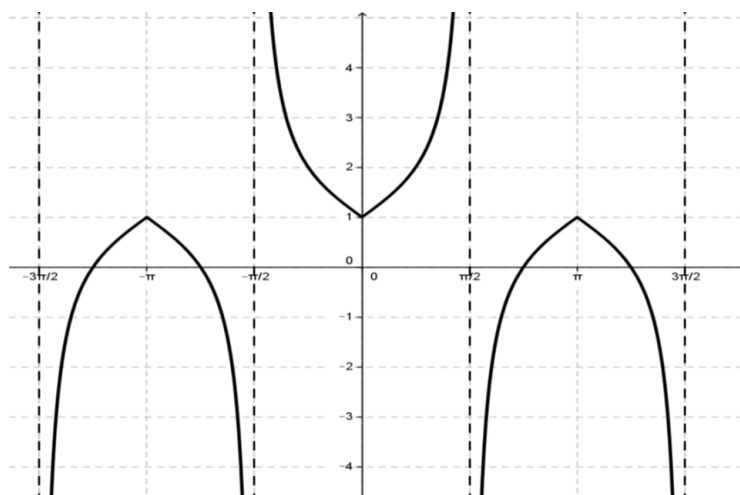
Stosujemy definicję wartości bezwzględnej i przekształcamy wzór funkcji do postaci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x}; & x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}; & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Następnie stosujemy związek $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ i otrzymujemy

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{tg} x; & x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \\ 1 - \operatorname{tg} x; & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Sporządzamy wykres funkcji i podajemy zbiór rozwiązań nierówności



Odp.: $0 \leq f(x) < 2 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$

Zadanie 5.

Suma trzech liczb będących kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego jest równa 52. Jeżeli do pierwszej liczby dodamy 2, do drugiej 12, a do trzeciej 6, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz ten ciąg.

Rozwiązanie:

Oznaczmy a_1, a_2, a_3 - wyrazy rosnącego ciągu geometrycznego,
 $a_1 + 2, a_2 + 12, a_3 + 6$ - wyrazy ciągu arytmetycznego.

Zapisujemy układ zależności między wyrazami ciągu arytmetycznego oraz ciągu geometrycznego

$$\begin{cases} (a_2 + 12) - (a_1 + 2) = (a_3 + 6) - (a_2 + 12) \\ a_1 + a_2 + a_3 = 52 \end{cases}$$

Po zastosowaniu wzoru ogólnego na wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 52 \\ a_1 + a_1q^2 - 2a_1q = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{52}{1+q+q^2} \\ a_1 = \frac{16}{1+q^2-2q} \end{cases} \quad q \neq 1$$

Stąd otrzymujemy równanie $\frac{52}{1+q+q^2} = \frac{16}{1+q^2-2q}$,

które po uporządkowaniu ma postać

$$3q^2 - 10q + 3 = 0.$$

$$\Delta = 64$$

$$q = 3 \text{ lub } q = \frac{1}{3}.$$

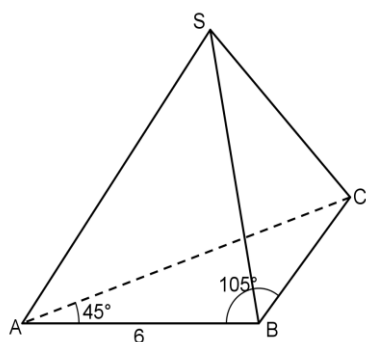
Obliczamy odpowiednio $a_1 = 4$, $a_1 = 36$.

Ciąg jest rosnący, więc odrzucamy przypadek $q = \frac{1}{3}$.

Odp.: Szukany ciąg to 4,12,36.

Zadanie 6.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego jeden z boków ma długość 6, a kąty do niego przyległe mają miary 45° i 105° . Wysokość ostrosłupa ma długość równą długości promienia okręgu opisanego na podstawie. Oblicz objętość ostrosłupa. Wynik podaj w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.



Rozwiązanie:

Dane:

$$|AB| = 6$$

$$|\angle BAC| = 45^\circ$$

$$|\angle CBA| = 105^\circ$$

Szukane:

$$V$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_{\Delta ABC} \cdot H$$

W ΔABC

$$|\angle BCA| = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

Oznaczmy $|AC| = x$, z twierdzenia sinusów w ΔABC mamy

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{\sin 105^\circ}$$
$$x = \frac{6 \cdot \sin 105^\circ}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot \sin 105^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{Stąd } x = 12 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 3(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \sin 45^\circ = 9(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = (9\sqrt{3} + 9) [j.^2]$$

Z wniosku z twierdzenia sinusów

$$2R = \frac{6}{\sin 30^\circ} = 12$$

$$\text{Stąd } H = 6.$$

Obliczamy objętość

$$V = \frac{1}{3} \cdot (9\sqrt{3} + 9) \cdot 6 = (18\sqrt{3} + 18) [j.^3]$$

$$\text{Odp.: } V = (18 + 18\sqrt{3}) [j.^3]$$

Zadanie 7.

Dany jest wielomian $W(x)$ stopnia $n > 2$, którego suma wszystkich współczynników jest równa 4, a suma współczynników przy potęgach o wykładnikach nieparzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach o wykładnikach parzystych. Wykaż, że reszta $R(x)$ z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = (x + 1)(x - 1)$ jest równa $R(x) = 2x + 2$.

Dowód:

Z twierdzenia o rozkładzie wielomianu mamy

$$W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$$

Skoro $st. W(x) > 2$ i $st. P(x) = 2$, to $R(x) = ax + b$, zatem

$$W(x) = (x - 1)(x + 1)Q(x) + ax + b.$$

Suma wszystkich współczynników jest równa 4, tzn. $W(1) = 4$.

Suma współczynników przy potęgach o wykładnikach nieparzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach o wykładnikach parzystych, tzn. $W(-1) = 0$.

Z twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $(x - r)$ mamy ponadto

$$R(1) = W(1) \text{ oraz } R(-1) = W(-1).$$

Mamy zatem
$$\begin{cases} a + b = 4 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

skąd $a = 2$ i $b = 2$, czyli

$$R(x) = 2x + 2. \text{ cnd}$$

Zadanie 8.

Narysuj wykres funkcji

$$f(x) = \log_2(-x^3 - 5x^2 - 3x + 9) - \log_2\left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right).$$

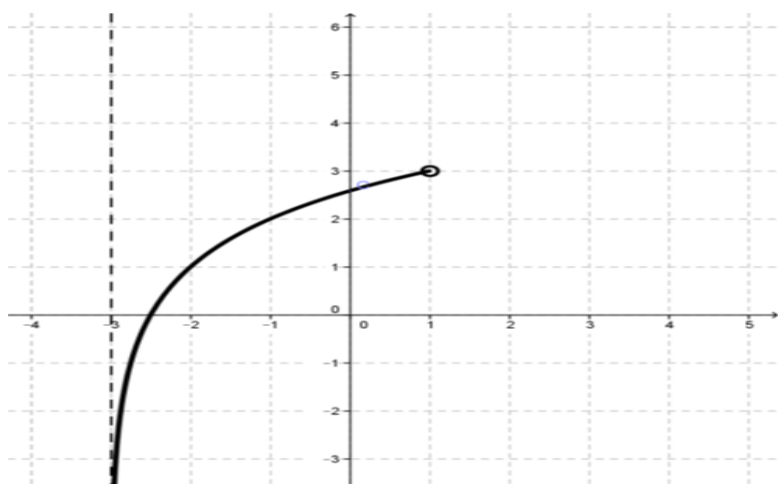
Rozwiązanie:

Wyznaczamy dziedzinę funkcji:

$-x^3 - 5x^2 - 3x + 9 > 0$ $W(1)=0$ $-(x-1)(x^2 + 6x + 9) > 0$ $-(x-1)(x+3)^2 > 0$ $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1)$	i	$-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} > 0$ $\Delta = 4$ $x_1 = 1, x_2 = -3$ $x \in (-3; 1)$
$D_f = (-3; 1)$		

Przekształcamy wzór funkcji:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_2 \frac{-x^3 - 5x^2 - 3x + 9}{-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}} = \log_2 \frac{-(x-1)(x+3)^2}{-\frac{1}{2}(x-1)(x+3)} = \log_2 2(x+3) \\ &= \log_2 2 + \log_2(x+3) = 1 + \log_2(x+3) \end{aligned}$$



Zadanie 9. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ wybieramy losowo jednocześnie cztery liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą będzie 3 lub największą wylosowaną liczbą będzie 7.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = \binom{8}{4}$

Oznaczamy zdarzenia losowe i wyznaczamy liczbę zdarzeń sprzyjających tym zdarzeniom:

A_1 –zdarzenie polegające na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą jest 3: $\bar{A}_1 = \binom{5}{3}$

A_2 –zdarzenie polegające na tym, że największą wylosowaną liczbą jest 7: $\bar{A}_2 = \binom{6}{3}$

$A = A_1 \cup A_2$ -zdarzenie polegające na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą jest 3 lub największą wylosowaną liczbą jest 7

$A_1 \cap A_2$ -zdarzenie polegające na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą jest 3 i największą wylosowaną liczbą jest 7: $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \binom{3}{2}$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A

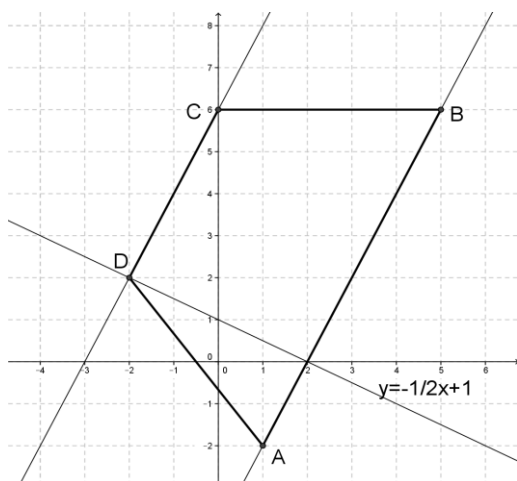
$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Odp.: $P(A) = \frac{27}{70}$.

Zadanie 10.

Punkty $B = (5, 6)$ i $C = (0, 6)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, którego podstawy AB i CD są prostopadłe do prostej k o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu, wiedząc, że punkt D należy do prostej k .

Rozwiązanie:



Prosta CD jest prostopadła do prostej k , zatem jej współczynnik kierunkowy $a = 2$, mamy więc $pr. CD: y = 2x + b$.

Skoro punkt C należy do tej prostej otrzymujemy $6 = 2 \cdot 0 + b$, skąd $pr. CD: y = 2x + 6$.

Punkt D jest punktem przecięcia się prostej k z prostą CD , zatem jego współrzędne obliczamy z układu równań

$$\begin{cases} y = 2x + 6. \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

i otrzymujemy $D = (-2, 2)$.

Wyznaczamy równanie prostej AB , która jest równoległa do prostej CD , zatem ma taki sam współczynnik kierunkowy.

Skoro do prostej AB należy punkt B jej równanie ma postać

$$pr. AB: y = 2x - 4$$

Trapez jest równoramienny, więc mamy $|AD| = |DC|$.

Ponadto punkt A należy do prostej AB , zatem $A = (x, 2x - 4)$.

Otrzymujemy równanie

$$\sqrt{(x+2)^2 + (2x-6)^2} = 5,$$

skąd $A = (1, -2)$ lub $A = (3, 2)$.

Odp.: $A = (1, -2)$ lub $A = (3, 2)$ oraz $D = (-2, 2)$.

Zadanie 11.

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c.$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b, c \in \mathbb{R}$

Teza: $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c$

Dowód:

Niech $a, b, c \in R$ i założmy, że

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 < 2a + 12b + 6c$$

$$(a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + 3(c^2 - 2c + 1) < 0$$

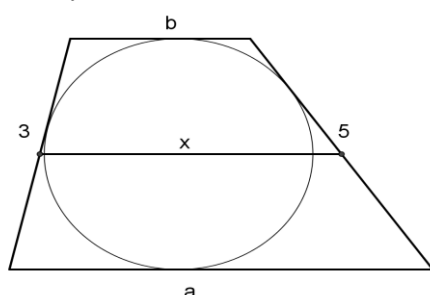
$$(a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 < 0$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną oraz suma liczb nieujemnych jest liczbą nieujemną, zatem teza jest prawdziwa. cnd.

Zadanie 12.

W trapezie opisanym na okręgu boki nierównoległe mają długości 3 i 5, zaś odcinek łączący środki tych boków dzieli trapez na dwie części, których pola są w stosunku 5:11. Oblicz długości podstaw trapezu.

Rozwiązanie:



Dane:

$$c = 5$$

$$d = 3$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{11}$$

Szukane:

$$a, b$$

Stosujemy twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i otrzymujemy: $a + b = 8$.

Wyznaczamy długość odcinka łączącego środki nierównoległych boków trapezu:

$$x = \frac{a + b}{2} = 4$$

Zauważmy, że wysokości obu powstałych trapezów są równe. Obliczamy pola trapezów:

$$P_1 = \frac{b+x}{2}h = \frac{(b+4)h}{2}, \quad P_2 = \frac{a+x}{2}h = \frac{(a+4)h}{2}$$

$$\text{Zapisujemy stosunek pól obu części: } \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{(b+4)h}{2}}{\frac{(a+4)h}{2}} = \frac{(b+4)h}{2} \cdot \frac{2}{(a+4)h} = \frac{b+4}{a+4}.$$

Mamy zatem układ równań:

$$\begin{cases} \frac{b+4}{a+4} = \frac{5}{11} \\ a + b = 8 \\ 5a - 11b = 24 \\ a + b = 8 \quad / \cdot (-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a - 11b = 24 \\ -5a - 5b = -40 \end{cases},$$

Skąd $-16b = -16 \quad /:(-16)$

$$b = 1,$$

zatem $\begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases}$

Odp.: $a = 7, b = 1$.