

Matura próbna 2014 z matematyki-poziom podstawowy

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
odp	A	C	C	C	A	A	B	B	C	B	D	A

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	C	A	B	A	D	C	B	D	D	C	A	C

Rozwiązania zadań otwartych

(zadania rozwiązał Mariusz Walkowiak, nauczyciel matematyki w Zespole Szkół Ekonomiczno-Administracyjnych w Bydgoszczy)

Zadanie 26. Rozwiąż równanie: $\frac{3x-6}{x^2-4} = 2$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy dziedzinę: $x^2 - 4 \neq 0$

$$(x - 2)(x + 2) \neq 0$$

$$x \neq 2 \text{ i } x \neq -2$$

$$D = R \setminus \{-2, 2\}$$

Rozwiązujemy równanie: $\frac{3x-6}{x^2-4} = 2 \quad / \cdot (x^2 - 4)$

$$3x - 6 = 2(x^2 - 4)$$

$$3x - 6 = 2x^2 - 8$$

$$3x - 6 - 2x^2 + 8 = 0$$

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac, \text{ czyli } \Delta = 3^2 - 4(-2) \cdot 2 = 9 + 16 = 25. \text{ Stąd } \sqrt{\Delta} = 5.$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2, \quad x_2 = \frac{-3+5}{2 \cdot (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Uwzględniając dziedzinę: $x = -\frac{1}{2}$.

Odp.: $x = -\frac{1}{2}$.

Zad.27. Wykaż, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku są prostopadłe.

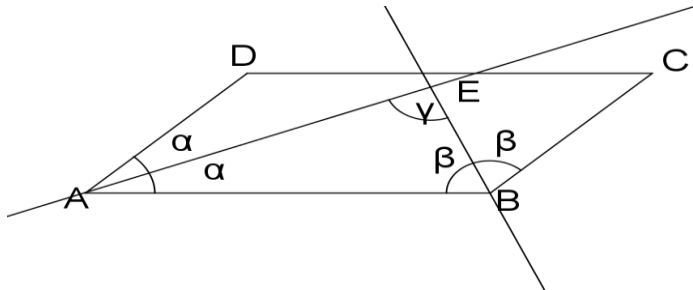
Rozwiązanie:

Założenie: $pr.AE$ oraz $pr.BE$ -dwusieczne kątów wewnętrznych równoległoboku

Teza: $pr.AE \perp pr.BE$

Dowód:

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku:



Suma miar dwóch sąsiednich kątów równoległoboku jest równa 180° , zatem:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ :2$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Korzystając z faktu, że suma miar kątów trójkąta ABE jest równa 180° otrzymujemy:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Podstawiając: $\alpha + \beta = 90^\circ$ otrzymujemy: $90^\circ + \gamma = 180^\circ$

Stąd $\gamma = 90^\circ$, co oznacza, że dwusieczne sąsiednich kątów równoległoboku są prostopadłe.

cnd.

Zad.28. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $y = x^2 - 4x + 1$ w przedziale $< 3,5 >$.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy współrzędna p wierzchołka paraboli należy do przedziału $< 3,5 >$.

$$\text{Obliczamy } p = \frac{-b}{2a}$$

$$p = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2 \notin < 3,5 >$$

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału $< 3,5 >$:

$$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$$

$$f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 25 - 20 + 1 = 6$$

Odp.: Największa wartość funkcji $y = x^2 - 4x + 1$ w przedziale $< 3,5 >$ jest równa 6, a najmniejsza -2.

Zad.29. Ze zbioru liczb trzycyfrowych mniejszych od 500 wybieramy losowo jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to liczba podzielna przez 3 lub przez 5?

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ gdzie}$$

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 3,

B – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 5,

$A \cap B$ – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 3 i 5, czyli przez 15.

Liczb trzycyfrowych mniejszych od 500 jest $499 - 99 = 400$. Zatem $\bar{\Omega} = 400$.

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$499:3 = 166,(\bar{6})$. Zatem liczb mniejszych od 500 podzielnych przez 3 jest 166.

$99:3 = 33$, czyli liczb mniejszych od 100 podzielnych przez 3 jest 33. Stąd liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3, mniejszych od 500 jest $166 - 33 = 133$. Więc $\bar{A} = 133$.

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{133}{400}.$$

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia B:

$499:5 = 99,8$. Zatem liczb mniejszych od 500 podzielnych przez 5 jest 99.

$99:5 = 19,8$, czyli liczb mniejszych od 100 podzielnych przez 5 jest 19. Stąd liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5, mniejszych od 500 jest $99 - 19 = 80$. Więc $\bar{B} = 80$.

$$P(B) = \frac{\bar{B}}{\bar{\Omega}} = \frac{80}{400}.$$

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cap B$:

$499:15 = 33,2(\bar{6})$. Zatem liczb mniejszych od 500 podzielnych przez 15 jest 33.

$99:15 = 6,6$, czyli liczb mniejszych od 100 podzielnych przez 15 jest 6. Stąd liczb trzycyfrowych podzielnych przez 15, mniejszych od 500 jest $33 - 6 = 27$. Więc $\overline{A \cap B} = 27$.

$$P(A \cap B) = \frac{\overline{A \cap B}}{\bar{\Omega}} = \frac{27}{400}.$$

Teraz podstawiamy do wzoru na prawdopodobieństwo sumy:

$$P(A \cup B) = \frac{133}{400} + \frac{80}{400} - \frac{27}{400} = \frac{186}{400} = \frac{93}{200}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo wylosowania liczby trzycyfrowej mniejszej od 500 podzielnej przez 3 lub 5 jest równe $\frac{93}{200}$.

Zad.30. Wykaż, że jeżeli $x + y = 5$, to $x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2}$.

Rozwiązanie:

Założenie: $x + y = 5$

Teza: $x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2}$

Dowód:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2x^2 + 2y^2 \geq 25$$

Korzystamy z założenia $x + y = 5$ i wyznaczamy $y = 5 - x$.

Podstawiamy i otrzymujemy:

$$2x^2 + 2(5 - x)^2 \geq 25$$

$$2x^2 + 2(25 - 10x + x^2) \geq 25$$

$$2x^2 + 50 - 20x + 2x^2 - 25 \geq 0$$

$$4x^2 - 20x + 25 \geq 0$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

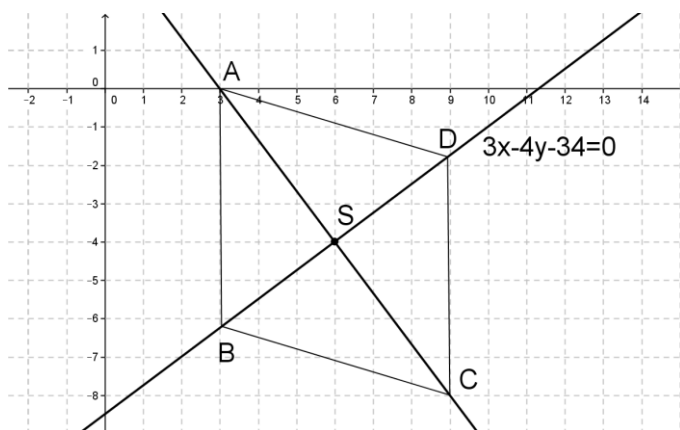
$$(2x - 5)^2 \geq 0$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla $x \in \mathbb{R}$, zatem nierówność $x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2}$ jest prawdziwa, cnd.

Zad.31. Przekątne AC i BD rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = (6, -4)$. Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną AC wiedząc, że prosta zawierająca przekątną BD ma równanie $3x - 4y - 34 = 0$.

Rozwiązanie:

Przykładowy rysunek do zadania:



Prostą $3x - 4y - 34 = 0$ przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$-4y = -3x + 34 \quad /: (-4)$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{34}{4}$$

Przekątne rombu są prostopadłe, więc prosta AC jest prostopadła do prostej BD.

Dwie proste są prostopadłe, jeśli iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1 ,

zatem współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy $-\frac{4}{3}$.

Prosta AC przechodzi przez punkt $C = (6, -4)$.

Wyznaczamy jej równanie:

$$y = ax + b$$

$$-4 = -\frac{4}{3} \cdot 6 + b$$

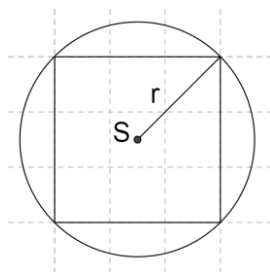
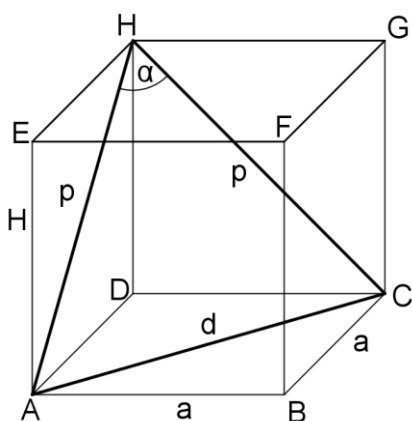
$$-4 = -8 + b$$

$$b = 4$$

Odp.: Równanie prostej zawierającej przekątną AC ma postać $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

Zad.32. Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 224 cm^3 , promień okręgu opisanego na podstawie ma długość 4 cm . Wyznacz miarę kąta między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka graniastosłupa.

Rozwiązanie:



Oznaczenia:

a – krawędź podstawy,

H – wysokość graniastosłupa,

Dane:

$$V = 224 \text{ cm}^3$$

$$r = 4 \text{ cm}$$

r – promień okręgu opisanego na podstawie,

d – przekątna podstawy,

p – przekątna ściany bocznej,

α – kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka graniastosłupa.

$$r = \frac{1}{2}d$$

$$4 = \frac{1}{2}d \quad / \cdot 2$$

$$d = 8cm$$

Korzystamy ze wzoru na przekątną kwadratu $d = a\sqrt{2}$ do obliczenia długości krawędzi podstawy:

$$8 = a\sqrt{2} \quad / : \sqrt{2}$$

$$a = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}cm$$

Korzystamy ze wzoru na objętość graniastosłupa, aby obliczyć długość wysokości H :

$$V = Pp \cdot H$$

$$Pp = a^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32cm^2$$

$$224 = 32H \quad / : 32$$

$$H = 7cm.$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AEH i obliczamy długość przekątnej ściany bocznej:

$$H^2 + a^2 = p^2$$

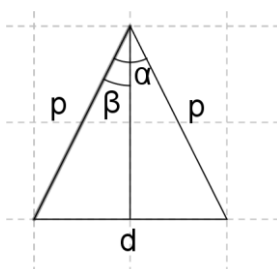
$$7^2 + (4\sqrt{2})^2 = p^2$$

$$49 + 32 = p^2$$

$$p^2 = 81$$

$$p = 9, \quad p > 0.$$

Niech $\beta = \frac{1}{2}\alpha$



Wyznaczamy miarę kąta β korzystając z funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \beta = \frac{\frac{1}{2}d}{p} = \frac{4}{9} \approx 0,4444$$

Odczytujemy miarę kąta β korzystając z tablic matematycznych $\beta = 26^\circ$.

Zatem $\alpha = 52^\circ$.

Odp.: Miara kąta między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka graniastosłupa jest równa 52° .

Zad.33. Samochód przejechał $\frac{1}{4}$ trasy ze średnią prędkością 80 km/h . Na całej trasie średnia prędkość samochodu była równa 64 km/h . Oblicz z jaką średnią prędkością samochód przejechał pozostałą część trasy.

Rozwiązanie:

Oznaczenia:

s – długość trasy, s_1 – długość $\frac{1}{4}$ części trasy, s_2 – długość $\frac{3}{4}$ trasy,

v – prędkość na całej trasie, v_1 – prędkość na $\frac{1}{4}$ części trasy, v_2 – prędkość na $\frac{3}{4}$ trasy,

t – czas przejazdu całej trasy, t_1 – czas przejazdu $\frac{1}{4}$ trasy, t_2 – czas przejazdu $\frac{3}{4}$ trasy.

Dane:

$$v = 64 \text{ km/h}, v_1 = 80 \text{ km/h}$$

Korzystamy ze wzoru na prędkość $v = \frac{s}{t}$, $v_1 = \frac{\frac{1}{4}s}{t_1}$, $v_2 = \frac{\frac{3}{4}s}{t_2}$. Ponadto $t = t_1 + t_2$.

Ze wzoru na prędkość wyznaczamy t, t_1, t_2 :

$$t = \frac{s}{v}, t_1 = \frac{\frac{1}{4}s}{v_1}, t_2 = \frac{\frac{3}{4}s}{v_2}.$$

Podstawiamy dane:

$$t = \frac{s}{64},$$

$$t_1 = \frac{\frac{1}{4}s}{80} = \frac{s}{4} \cdot \frac{1}{80} = \frac{s}{320}$$

$$t_2 = \frac{\frac{3}{4}s}{v_2} = \frac{3s}{4} \cdot \frac{1}{v_2} = \frac{3s}{4v_2}.$$

Wyznaczone t, t_1 oraz t_2 podstawiamy do zależności $t = t_1 + t_2$ i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{s}{64} = \frac{s}{320} + \frac{3s}{4v_2} \quad / \cdot 320v_2$$

$$5sv_2 = sv_2 + 240s \quad / : s$$

$$5v_2 = v_2 + 240$$

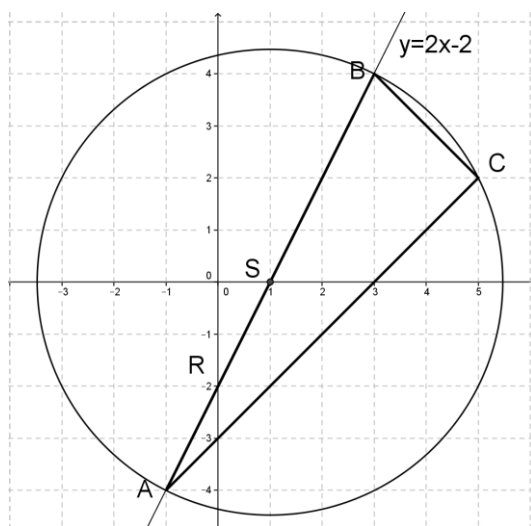
$$4v_2 = 240 \quad / : 4$$

$$v_2 = 60$$

Odp.: Średnia prędkość na pozostałej części trasy jest równa 60km/h.

Zad.34. W trójkącie prostokątnym ABC o przeciwprostokątnej AB dane są wierzchołki $A = (-1, -4)$ i $C = (5, 2)$. Punkt B leży na prostej o równaniu $y = 2x - 2$. Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:



Sprawdzamy, czy punkt $A = (-1, -4)$ leży na prostej $y = 2x - 2$

$$-4 = 2 \cdot (-1) - 2$$

$$-4 = -4$$

$$L = P$$

Zatem punkt A leży na prostej $y = 2x - 2$.

Wyznaczamy równanie prostej AC :

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} -4 = -1a + b \quad / \cdot (-1) \\ 2 = 5a + b \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 4 = 1a - b \\ 2 = 5a + b \end{cases}$$

$$6 = 6a / : 6$$

$$a = 1$$

$$2 = 5a + b$$

$$2 = 5 \cdot 1 + b$$

$$b = -3$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Prosta AC ma równanie: $y = x - 3$.

Wyznaczamy równanie prostej BC prostopadłej do AC i przechodzącej przez punkt B.

Dwie proste są prostopadłe, jeśli iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1 , więc współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy -1 .

$$y = -1x + b$$

Podstawiamy współrzędne punktu $C = (5, 2)$

$$2 = -1 \cdot 5 + b.$$

Zatem $b = 7$. Równanie prostej BC ma postać: $y = -x + 7$

Obliczamy współrzędne punktu B – punktu przecięcia prostych AB i BC rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -x + 7 \end{cases} / \cdot 2$$

$$+ \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2y = -2x + 14 \end{cases}$$

$$3y = 12 / : 3$$

$$y = 4$$

$$y = 2x - 2$$

$$4 = 2x - 2$$

$$4 + 2 = 2x$$

$$x = 3$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Punkt $B = (3, 4)$.

Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym, zatem środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem przeciwprostokątnej AB.

Wyznaczamy współrzędne S środka odcinka AB:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$S = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-4+4}{2} \right) = (1, 0).$$

Wyznaczamy długość promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie

$$R = |AS| = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2}$$

$$R = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (0 - (-4))^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r ma postać: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Odp.: Równanie szukanego okręgu ma postać: $(x - 1)^2 + y^2 = 20$