

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ 2017/2018

MATEMATYKA POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.7. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.	B

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.3. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach. 2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.	A
--	--	---

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	D
--	---	---

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.6. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.	C
--	---	---

Zadanie 5. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)	A
--------------------------------	--	---

Zadanie 6. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$. 3. Równania i nierówności. Zdający: 1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności; 3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.	D
--	---	----------

Zadanie 7. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający: 6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$; 7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$.	B
--	---	----------

Zadanie 8. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający: 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu [...]; 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.	B
--	--	----------

Zadanie 9. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.3. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).	C
--	--	----------

Zadanie 10. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość; 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.	A
--	--	----------

Zadanie 11. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.10. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).	C
--	---	----------

Zadanie 12. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.2. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.	A
--	--	----------

Zadanie 13. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5.4. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	C
--------------------------------	---	----------

Zadanie 14. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° .	B
--	--	----------

Zadanie 15. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6.3. Trygonometria. Zdający oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną).	D
--	---	----------

Zadanie 16. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. 8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.	A
-----------------------------------	---	----------

Zadanie 17. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.1. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.	C
-----------------------------------	--	----------

Zadanie 18. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.2. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.	B
-----------------------------------	---	----------

Zadanie 19. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.4. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.	C
--	--	----------

Zadanie 20. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.2. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostokątłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych	C
--	---	----------

Zadanie 21. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli.	B
--	--	----------

Zadanie 22. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający: 4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostokątnianu płaszczyzną.	D
--	--	----------

Zadanie 23. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).	D
--------------------------------	--	----------

Zadanie 24. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	D
--	--	----------

Zadanie 25. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych. GIMNAZJUM 9.1. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów.	B
--	---	----------

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność: $x(x - 4) \leq (2x + 1)(x - 4)$.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Przykładowe rozwiązania

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów. Pierwszy polega na ustaleniu pierwiastków trójmianu kwadratowego, drugi – na ustaleniu zbioru rozwiązań nierówności.

Realizacja pierwszego etapu

Sposób I

Przenosimy składniki na jedną stronę nierówności

$$(2x + 1)(x - 4) - x(x - 4) \geq 0$$

i wyłączamy wspólny czynnik poza nawias, zapisując nierówność w postaci iloczynowej.

$$(x - 4)(2x + 1 - x) \geq 0$$

$$(x - 4)(x + 1) \geq 0$$

Pierwiastkami trójmianu kwadratowego $(x - 4)(x + 1)$ są liczby $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Sposób II

Wymnażamy obie strony nierówności:

$$x^2 - 4x \leq 2x^2 - 8x + x - 4$$

i redukujemy wyrazy podobne, zapisując nierówność w postaci równoważnej:

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0$$

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 3x - 4$.

- Obliczamy wyróżnik tego trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25, \text{ stąd } x_1 = \frac{3-5}{2} = -1, x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

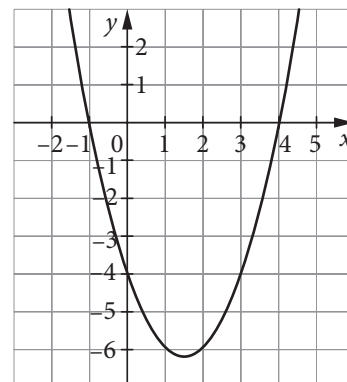
albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 = -4 \text{ oraz } x_1 + x_2 = 3, \text{ stąd } x_1 = -1 \text{ oraz } x_2 = 4,$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, zapisując pierwiastki trójmianu $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ (podajemy uzasadnienie, np. $f(-1) = f(4) = 0$) lub zaznaczając je na wykresie.



Realizacja drugiego etapu

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \leq -1$ lub $x \geq 4$.

Alternatywnie: $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy:

- prawidłowo wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap, popełni błąd, ale otrzyma dwa różne pierwiastki i konsekwentnie rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy:

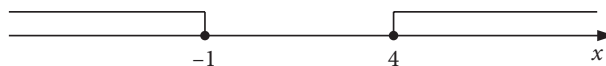
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ albo w postaci: $x \leq -1$ lub $x \geq 4$

albo

- sporządzi poprawną ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \leq -1$ lub $x \geq 4$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Uwagi

1. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez $x - 4$ bez stosownego założenia lub rozważy tylko jedno założenie: $x > 4$ albo $x < 4$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez $x - 4$ i rozważy jedno z założeń: $x > 4$, $x < 4$ oraz sprawdzi warunek $x = 4$, rozwiąże nierówność w każdym z dwóch przypadków oraz konsekwentnie wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez $x - 4$ i rozważy dwa założenia: $x > 4$, $x < 4$ oraz sprawdzi warunek $x = 4$, rozwiąże nierówność w każdym z trzech przypadków i poprawnie wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{4n+5}{2n+1}$ dla $n \geq 1$. Sprawdź, czy istnieje wyraz tego ciągu równy $2\frac{1}{2}$.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	3.8. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych. 5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

Ciąg (a_n) ma wyraz $a_n = 2\frac{1}{2}$ wtedy, gdy rozwiązaniem równania $\frac{4n+5}{2n+1} = 2\frac{1}{2}$ jest liczba naturalna dodatnia.

$$\frac{4n+5}{2n+1} = \frac{5}{2}$$

$$10n+5 = 8n+10$$

$$n = \frac{5}{2}$$

Liczba $n = \frac{5}{2}$ nie jest liczbą naturalną, więc w tym ciągu nie istnieje wyraz równy $2\frac{1}{2}$.

Sposób II

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu (a_n) : $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$. Wystarczy zatem uzasadnić, że ciąg (a_n) jest malejący.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)+5}{2(n+1)+1} - \frac{4n+5}{2n+1} = \frac{(4n+9)(2n+1) - (4n+5)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

Mnożymy wyrażenia w nawiasach, redukujemy wyrazy podobne i ostatecznie otrzymujemy

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-6}{(2n+3)(2n+1)} < 0 \text{ dla } n \in N_+, \text{ więc ciąg } (a_n) \text{ jest malejący:}$$

Ciąg (a_n) jest malejący, $a_2 = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}$, a $a_3 = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$, więc w tym ciągu nie istnieje wyraz równy $2\frac{1}{2}$.

Sposób III

Wzór na wyraz ciągu można przekształcić w następujący sposób:

$$a_n = \frac{4n+5}{2n+1} = \frac{(4n+2)+3}{2n+1} = \frac{2(2n+1)+3}{2n+1} = 2 + \frac{3}{2n+1}.$$

Z powyższego zapisu widać, że ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym. I dalej jak wyżej.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje **1 pkt**
gdy:

- poprawnie wyznaczy rozwiązanie równania wymiernego: $n = \frac{5}{2}$
- albo
- uzasadni, że ciąg (a_n) jest malejący.

Zdający otrzymuje **2 pkt**
gdy poprawnie uzasadni, że w ciągu (a_n) nie istnieje wyraz równy $2\frac{1}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający jedynie wyznaczy wyrazy $a_1 = 3$, $a_2 = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}$, $a_3 = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$ i stąd wywnioskuje, że w ciągu (a_n) nie istnieje wyraz równy $2\frac{1}{2}$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy wyrazy $a_1 = 3$, $a_2 = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}$, $a_3 = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$ i badając monotoniczność ciągu popełni błędy rachunkowe, ale przeprowadzi poprawne rozumowanie prowadzące do wniosku, że wyraz równy $2\frac{1}{2}$ nie istnieje, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

Udowodnij, że nierówność $(x^2 - 3)^2 + x^4 \geq 4\frac{1}{2}$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Przykładowe rozwiązanie

Sposób I

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Chcemy wykazać, że $(x^2 - 3)^2 + x^4 \geq 4\frac{1}{2}$.
Przekształcamy tezę do postaci równoważnej.

$$x^4 - 6x^2 + 9 + x^4 - \frac{9}{2} \geq 0$$

$$2x^4 - 6x^2 + \frac{9}{2} \geq 0$$

$$4x^4 - 12x^2 + 9 \geq 0$$

$$(2x^2 - 3)^2 \geq 0$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x , bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny. Zatem równoważna jej teza też jest prawdziwa. To kończy dowód.

Sposób II

Do tezy podstawiamy $t = x^2$ i otrzymujemy nierówność kwadratową

$$(t - 3)^2 + t^2 \geq 4\frac{1}{2}$$

$$4t^2 - 12t + 9 \geq 0$$

Trójmian kwadratowy $4t^2 - 12t + 9$ najmniejszą wartość przyjmuje dla $t = -\frac{b}{2a}$ ($a > 0$).

Dla $t = -\frac{-12}{8} = 1,5$ wartość trójmianu wynosi 0.

Ponieważ najmniejsza wartość trójmianu wynosi 0, zatem nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x , a tym samym jest prawdziwa teza twierdzenia.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

- gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej $(2x^2 - 3)^2 \geq 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- zapisze nierówność jako nierówność kwadratową (po podstawieniu $t = x^2$) i obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego lub poda współrzędne wierzchołka paraboli.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 29. (0–2)

Dla pewnej liczby rzeczywistej x liczby $1 - x$, $2 - 3x$, $10 + 2x$ są trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$. Wyznacz x oraz oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykładowe rozwiązanie

Korzystamy z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie.

$$\begin{aligned}\frac{1 - x + 10 + 2x}{2} &= 2 - 3x \\ x + 11 &= 4 - 6x \\ x &= -1\end{aligned}$$

Stąd $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, Różnica tego ciągu $r = 3$.

Możemy skorzystać ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_{10} = 2 + 5 + 8 + \dots + a_{10} = \frac{2 \cdot 2 + 9 \cdot 3}{2} \cdot 10 = 155$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

- gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = 2$ oraz jego różnicę: $r = 3$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- wyznaczy wyraz pierwszy oraz różnicę z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy sumę dziesięciu początkowych wyrazów otrzymanego ciągu.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu: $S_{10} = 155$.

Uwaga

Jeżeli zdający stosuje własności ciągu geometrycznego zamiast własności ciągu arytmetycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 30. (0–2)

Ośią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + 3$, gdzie $a \neq 0$, jest prosta o równaniu $x = -2$. Wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu $y = -x + 2$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej bądź kanonicznej.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

Przykładowe rozwiązania

Prosta o równaniu $x = -2$ jest osią symetrii paraboli, więc pierwszą współrzędną jej wierzchołka $W(p, q)$ jest $p = -2$. Wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu $y = -x + 2$, więc drugą współrzędną wierzchołka jest $q = 2 + 2 = 4$. Stąd wierzchołkiem paraboli jest punkt $W = (-2, 4)$. Szukamy wzoru funkcji kwadratowej w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

bądź w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

Sposób I

Zauważmy, że $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 3 = 3$, więc do paraboli należy punkt $P = (0, 3)$. Wstawiamy współrzędne punktu P do wzoru funkcji f .

$$3 = a(0 + 2)^2 + 4$$

$$4a = -1$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

Wzór funkcji w postaci kanonicznej ma postać:

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 4.$$

Sposób II

Tworzymy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = -2 \\ f(-2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 3 = 4 \end{cases}$$

Stąd:

$$4a - 8a = 1$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = 4a,$$

$$b = -1.$$

Zatem

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3.$$

Sposób III

Tworzymy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = -2 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 4 \end{cases}$$

Stąd po podstawieniu otrzymujemy równanie:

$$\frac{-16a^2 + 12a}{4a} = 4$$

$$\frac{4a(-4a + 3)}{4a} = 4$$

$$-4a + 3 = 4$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = 4a,$$

$$b = -1.$$

Zatem

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje **1 pkt**

gdy wyznaczy współrzędne wierzchołka paraboli $p = -2$, $q = 4$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje **2 pkt**

gdy zapisze wzór funkcji w postaci kanonicznej $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2 + 4$ lub ogólnej $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$.

Zadanie 31. (0–3)

Na ściankach symetrycznej dwunastościennej kostki do gry zapisano liczby 1, 2, 3, ..., 12 (jak na rysunku). Rzucamy tą kostką trzy razy i zapisujemy wyrzucone liczby w kolejności otrzymywania, tworząc ciąg trójwyrazowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzymy w ten sposób ciąg geometryczny o ilorazie całkowitym.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Przykładowe rozwiązanie

Zdarzeniem elementarnym jest każdy trójwyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$. Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym. Z reguły mnożenia wynika, że liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 12^3 = 1728$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy ciąg geometryczny o ilorazie całkowitym. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A pogrupujemy w zależności od ilorazu ciągu geometrycznego.

Iloraz ciągu	Ciągi	Liczba ciągów
$q = 1$	(1, 1, 1), (2, 2, 2), ..., (12, 12, 12)	12
$q = 2$	(1, 2, 4), (2, 4, 8), (3, 6, 12)	3
$q = 3$	(1, 3, 9)	1

Stąd liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 16$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{12 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{1}{108}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający:

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 12^3 = 1728$

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A : (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6), (7, 7, 7), (8, 8, 8), (9, 9, 9), (10, 10, 10), (11, 11, 11), (12, 12, 12), (1, 2, 4), (2, 4, 8), (3, 6, 12) (1, 3, 9)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 12^3 = 1728$ oraz zapisze, że $|A| = 16$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 3 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A i poda wynik w postaci ułamka nieskracalnego:

$$P(A) = \frac{1}{108}.$$

Uwaga

Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, ale przy wyznaczaniu liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A pominie jedno zdarzenie elementarne lub popełni błąd przy zliczaniu poprawnie wypisanych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.

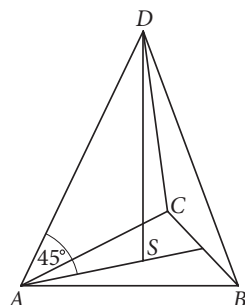
Zadanie 32. (0–3)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości $2\sqrt{3}$ krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9.2. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów. GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli.

Przykładowe rozwiązania

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny ABC , punkt S jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy jest równy 45° , zatem możemy zauważyć, że trójkąty prostokątne SBD , SAD , SCD są równoramienne. Można też skorzystać z własności funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym i obliczyć długość odcinków $AS = BS = CS$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{2\sqrt{3}}{x} \\ 1 &= \frac{2\sqrt{3}}{x}\end{aligned}$$

$$AS = BS = CS = 2\sqrt{3}$$

Aby obliczyć pole podstawy, potrzebna jest długość boku trójkąta lub wysokość trójkąta ABC . Wiadomo, że AS to $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta ABC . Obliczamy wysokość trójkąta ABC .

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}h &= 2\sqrt{3} \\ h &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

Wyznamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa $ABCD$, korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego ABC .

$$\begin{aligned}h &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 3\sqrt{3} &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ a &= 6\end{aligned}$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa. Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego.

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

Na koniec obliczamy objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający obliczy długość odcinka AS lub BS lub CS i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający obliczy wysokość podstawy ostrosłupa ($3\sqrt{3}$) oraz długość boku tej podstawy (6).

Rozwiązanie pełne 3 pkt

Zdający obliczy objętość ostrosłupa ABCD (18).

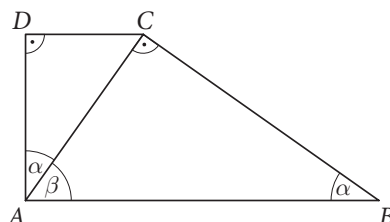
Zadanie 33. (0–4)

W trapezie prostokątnym ABCD o podstawach AB i CD przekątna AC jest prostopadła do ramienia BC, dłuższa podstawa AB ma długość 9, a sinus kąta CAD jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz pole tego trapezu.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych. GIMNAZJUM 10. Figury płaskie. Zdający: 7) stosuje twierdzenie Pitagorasa; 9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



Zauważmy, że $\alpha = 90^\circ - \beta$, więc $\sin \alpha = \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$. Stąd w trójkącie ABC :

$$\cos \beta = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|AC|}{9}$$

$$|AC| = 3\sqrt{3}$$

Następnie w trójkącie ACD :

$$\sin \alpha = \frac{|CD|}{|AC|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|CD|}{3\sqrt{3}}$$

$$|CD| = 3$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ACD :

$$|AD|^2 + 3^2 = (3\sqrt{3})^2$$

$$|AD| = 3\sqrt{2}$$

Pole trapezu $ABCD$ wynosi więc:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(9 + 3) \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający:

- zapisze, że $\sin \alpha = \cos \beta$

albo

- zauważy, że trójkąty ABC i ACD są podobne, więc $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CAD| = \alpha$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający obliczy długość przekątnej AC : $|AC| = 3\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający wyznaczy długości przyprostokątnych w trójkącie ACD : $|CD| = 3$, $|AD| = 3\sqrt{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

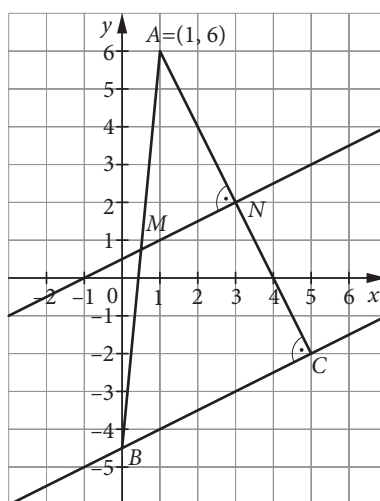
Zdający obliczy pole trapezu: $P_{ABCD} = 18\sqrt{2}$.

Zadanie 34. (0–5)

W trójkącie ABC wierzchołek A ma współrzędne $(1, 6)$, wierzchołek B leży na osi Oy , a $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$. Prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ jest równoległa do boku BC i przecina każdy z boków AB i AC w połowie. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 5) wyznacza współrzędne środka odcinka.

Przykładowe rozwiązanie



Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AB oraz AC . Z warunku prostopadłości wyznaczamy równanie prostej AN : $y = -2x + b$. Podstawiając współrzędne punktu $A = (1, 6)$ otrzymujemy równanie

$$6 = -2 \cdot 1 + b$$

$$b = 8$$

Zatem równanie prostej AN ma postać: $y = -2x + 8$.

Następnie obliczamy współrzędne punktu N . Jest to punkt wspólny prostych AN i MN , rozwiązujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

Stosując metodę podstawiania, otrzymujemy równanie:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -2x + 8$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{15}{2}$$

$$x = 3$$

Wstawiamy wyznaczoną wartość x np. do pierwszego równania układu:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} = 2.$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, stąd punkt $N = (3, 2)$.

Korzystając ze wzoru na środek odcinka, wyznaczamy współrzędne wierzchołka $C = (c_1, c_2)$.

$$\begin{cases} \frac{c_1 + 1}{2} = 3 \\ \frac{c_2 + 6}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

Zatem $C = (5, -2)$.

Wierzchołek B trójkąta jest punktem przecięcia prostej BC z osią Oy , wystarczy zatem wyznaczyć jej równanie.

Proste MN i BC są równoległe, stąd równanie prostej BC : $y = \frac{1}{2}x + b$. Podstawiając współrzędne punktu $C = (5, -2)$ otrzymujemy równanie:

$$-2 = \frac{5}{2} + b$$

$$b = -\frac{9}{2}$$

Zatem równanie prostej BC ma postać $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$. Wynika stąd, że $B = (0, -4\frac{1}{2})$.

Odpowiedź: $B = (0, -4\frac{1}{2})$, $C = (5, -2)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający wyznaczy równanie prostej AN : $y = -2x + 8$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający obliczy współrzędne punktu $N = (3, 2)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający wyznaczy współrzędne punktu $C = (5, -2)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania 4 pkt

Zdający zapisze równanie prostej BC : $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$ i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zdający obliczy współrzędne obu punktów: $B = (0, -4\frac{1}{2})$, $C = (5, -2)$.