

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
POZIOM ROZSZERZONY

Próbna Matura z Operonem 2023/2024

TERMIN: 22 listopada 2023 r.

Czas pracy: 180 minut

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 19 stron (zadania 1.–13.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązywaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\log_5 7 \cdot \log_{49} 625}{\log_3 \sqrt[3]{2} - 2\log_3 \sqrt[6]{54}}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–2)

Dana jest funkcja kwadratowa f . Miejsca zerowe tej funkcji spełniają warunek $x_1 + x_2 = 8$. Wiadomo, że $f(0) > 0$ oraz funkcja f w przedziale $[0, 6]$ przyjmuje wartość najmniejszą równą (-5) i wartość największą równą 27 .

Podaj wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.

2.

0–1–2

3.

0-1-2

Zadanie 3. (0-2)

Oblicz granicę ciągu $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 + 11 + 16 + \dots + (5n + 1)}{7n^2 - 4}$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 4. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ oraz dla każdej liczby rzeczywistej $y \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność $4x^3y^2 - 4y^2 - 12x^3y + 12y + 9x^3 - 8 > 0$.

4.

0–1–
2–3

0-1-
2-3

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 6. (0–3)

Na trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym trzy boki mają taką samą długość, opisano okrąg o promieniu r . Dłuższa podstawa trapezu ma długość $2r$.

Udowodnij, że przekątna trapezu ma długość $r\sqrt{3}$.

6.

0–1–

2–3

7.

0-1-
2-3-4

Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \sin 6x$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 8. (0–4)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x - 4}$, gdzie $x \neq 4$.

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $[5, 10]$. Zapisz obliczenia.

8.

0–1–
2–3–4



Zadanie 9. (0–5)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{3}{2}x^4 + \frac{17}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - x - 5$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz równanie tej stycznej do wykresu funkcji f , która jest prostopadła do prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + 15$, a współrzędna odcięta x_0 punktu styczności jest mniejsza od (-1) . Zapisz obliczenia.

9.

0–1–
2–3–
4–5



Zadanie 10. (0–5)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $|AD| = a$, $|AB| = 2a$. Dwusieczna kąta ADC przecięła prostą AC w punkcie E takim, że $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{2}{3}$. Obwód czworokąta $ABCD$ wynosi 84.

W czworokąt można wpisać okrąg. Ponadto $\cos \angle ADC = \frac{1}{16}$.

Oblicz promienie okręgów opisanych na trójkącie ACD oraz na trójkącie ABC .

10.

0–1–
2–3–
4–5



Zadanie 11. (0–5)

Dany jest czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) , który jest rosnącym ciągiem arytmetycznym o wyrazach dodatnich. Jeżeli do kwadratu sumy pierwszego i trzeciego wyrazu dodamy kwadrat różnicy drugiego i czwartego wyrazu, to otrzymamy kwadrat największego wyrazu ciągu. Ponadto ciąg $(3a + 30, 3b, c + 2)$ jest geometryczny.

Oblicz wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego. Zapisz obliczenia.

11.

0–1–

2–3–

4–5

12.

0-1-
2-3-
4-5-6

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + mx + 3 - m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 o tych samych znakach, spełniające warunek

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{-2}{m+3}, \text{ gdzie } m \neq -3. \text{ Zapisz obliczenia.}$$





Zadanie 13.

Dana jest prosta k o równaniu $y = -\frac{1}{3}x - 1$ i punkt $A(0, -1)$ leżący na prostej k oraz prosta l o równaniu $y = -3x - 17$ i punkt $B(-4, -5)$ należący do prostej l .

Zadanie 13.1. (0–2)

Wyznacz współrzędne punktu D należącego do prostej k , którego odległość od prostej l jest równa $2\sqrt{10}$.

13.1.

0–1–2



Zadanie 13.2. (0–4)

Napisz równanie okręgu, który jest styczny do prostej k w punkcie A oraz do prostej l w punkcie B . Zapisz obliczenia.

13.2.

0–1–
2–3–4

--

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

 Arkusze do pobrania: [Arkuszmaturalny.pl](https://arkuszmaturalny.pl)

 Książki do matury: [Sklepematuralny.pl](https://sklepematuralny.pl)

